

1 Классификация ур-ий с частными производными II порядка

$$F(x, y, u(x, y), u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0 - \text{общий вид ур-ий II порядка}$$

$$A_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 - \text{ур-ие линейное относительно старшей производной}$$

Линейное ур-ие II порядка:

$$A_{11}(x, y) u_{xx} + 2A_{12}(x, y) u_{xy} + A_{22}(x, y) u_{yy} + b_1(x, y) u_x + b_2(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y)$$

Если $f(x, y) = 0 \Rightarrow$ однородное
 $f(x, y) \neq 0 \Rightarrow$ неоднородное

Опр. Ур-ие 1 называется ур-ием в $\bullet (x_0, y_0)$:

1) гиперболического типа, если $A_{11}(x_0, y_0) - A_{12}(x_0, y_0)A_{22}(x_0, y_0) > 0$

2) эллиптического типа, если $\text{---} < 0$

3) параболического типа, если $\text{---} = 0$

Примеры: 1) ур-ие колебаний:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

// $A_{12} = 0$; $A_{11} = -1$; $A_{22} = a^2 \Rightarrow 0 + a^4 > 0$ - гиперболический тип

2) ур-ие Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

// $A_{12} = 0$; $A_{11} = A_{22} = 1$; $\Rightarrow 0 - 1 < 0$ - эллиптический тип

3) ур-ие теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

// $A_{12} = 0$; $A_{11} = 0$; $A_{22} = a^2$; $0 - a^4 \cdot 0 = 0$ - параболический тип

тема: информат

Если ур-ие имеет разный тип в
различных областях • области, то оно
называется уравнением смешанного типа в
этой области

Опр: Квадратное уравнение:

$$a_{11}(x, y, z) u_{xx} + 2a_{12}(x, y, z) u_{xy} + a_{22}(x, y, z) u_{yy} + F_1(x, y, z) = 0$$

A

2) Вывод ур-ия теплопроводности в кр-ве

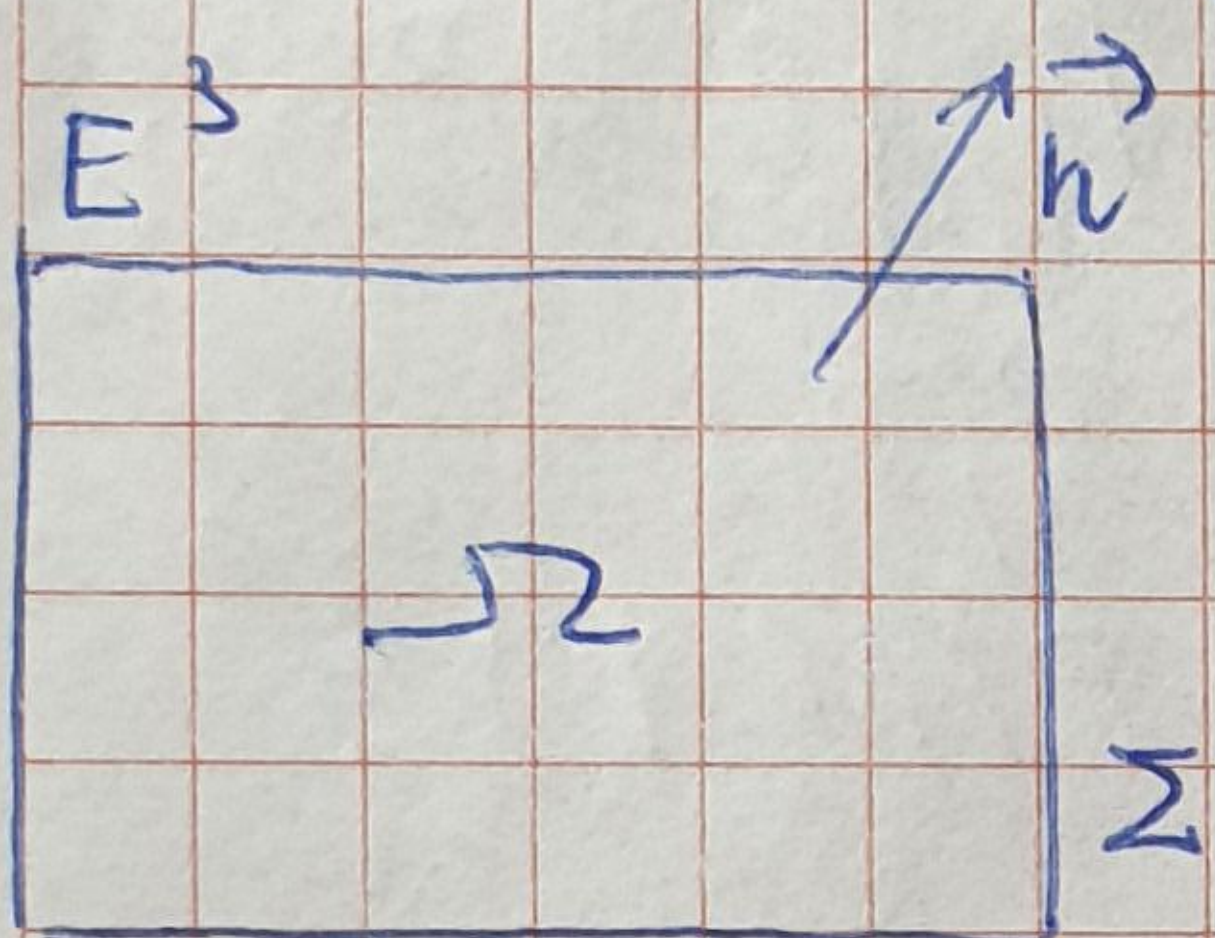
Градиент $f(x, y, z)$: $\text{grad } f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$ показывает направление наибольшего возрастания ф-ции

Дивергенция: Если векторное поле $A(x, y, z) = \{ P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \}$

Если $P(\cdot, \cdot, \cdot); Q(\cdot, \cdot, \cdot), R(\cdot, \cdot, \cdot)$ — скал-ры, то

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Ф-ла О-Г: $\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{A} dV$



Ф-ла Грина:

$$1) \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = f(\tilde{x}) \cdot (x_2 - x_1), \tilde{x} \in [x_1, x_2]$$

$$2) \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = f(\tilde{M}) \cdot V_{\Omega}, \tilde{M} = (x, y, z) \in \Omega$$

E^3 ; Ур-ие параболического типа $u(x, y, z, t)$ — температура. Для краткости $M = (x, y, z)$

$$\iiint_{\Omega} \underbrace{\rho(M)}_{\text{плотность}} \underbrace{c(M)}_{\text{теплоемкость}} \underbrace{u(M, t)}_{\text{температура}} dV_M$$

кол-во тепла в момент времени t .

$\Delta [t_1, t_2]$:

$$Q_2 - Q_1 = \iiint_{\Omega} \rho(M) c(M) (u(M, t_2) - u(M, t_1)) dV_M$$

Закон Фурье: $\overset{\text{тепло}}{\parallel} \rightarrow \text{холод}$

$W = -k(M) \text{grad } u$ — вектор теплового потока
 k — коэффициент теплопроводности.

применим ф-лу Лагранжа

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(- \iint_{\Sigma} (\vec{W}, \vec{n}) d\sigma \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(M, t) dV_M dt$$

+ - - - - - + - - - - -
 ф-ла О-Г

$$\iiint_{\Omega} \rho(M) c(M) \frac{\partial u}{\partial t}(M, t_3) d\Omega_M (t_2 - t_1) =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{W} d\Omega_M + \iiint_{\Omega} F(M, t_4) d\Omega_M (t_2 - t_1)$$

$t_4, t_3 \in [t_1, t_2]$

ф-но
среднего

$$\rho(M_1) c(M_1) \frac{\partial u}{\partial t}(M_1, t_3) V_{\Omega} (t_2 - t_1) =$$

$$= - \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{W} d\Omega_M \Big|_{t=t_3} (t_2 - t_1) + F(M_2, t_4) (t_2 - t_1) V_{\Omega}$$

$t_4, t_3 \in [t_1, t_2]$

ф-но
среднего

$$\rho(M_1) c(M_1) \frac{\partial u}{\partial t}(M_1, t_3) V_{\Omega} = - \operatorname{div} \vec{W} \Big|_{t=t_3} V_{\Omega} +$$

$$+ F(M_2, t_4) V_{\Omega} ; t_3, t_4, t_5 \in [t_1, t_2] \rightarrow t$$

$$c(M) \rho(M) \frac{\partial u}{\partial t}(M, t) = - \operatorname{div} \vec{W} \Big|_{t=t} + F(M, t)$$

$M_1, M_2, M_3 \in \Omega \rightarrow M$

$$\{ W = -k(M) \operatorname{grad} u \}$$

$$- \operatorname{div} W = \frac{\partial}{\partial x} (k(M) \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k(M) \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k(M) \frac{\partial u}{\partial z})$$

$$c(x, y, z) \rho(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} (k(x, y, z) \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (k(x, y, z) \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k(x, y, z) \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z}) +$$

$$+ F(x, y, z, t)$$

уравнение распространения тепла в трехмерном пространстве

$$\rho(x, y, z) c(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k(x, y, z) \operatorname{grad} u) + F(x, y, z, t)$$

$$\Delta^2 = \frac{k}{c \cdot \rho} - \text{коэффициент: } \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^2 \Delta u + f(x, y, z, t) - \text{уравнение теплопроводности}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}; f = F / (c \cdot \rho)$$

здесь $c, \rho, k - \text{const}$

3 Ур-ие теплопроводности с 1^{ой} пространственной переменной. Постановка основной задачи.

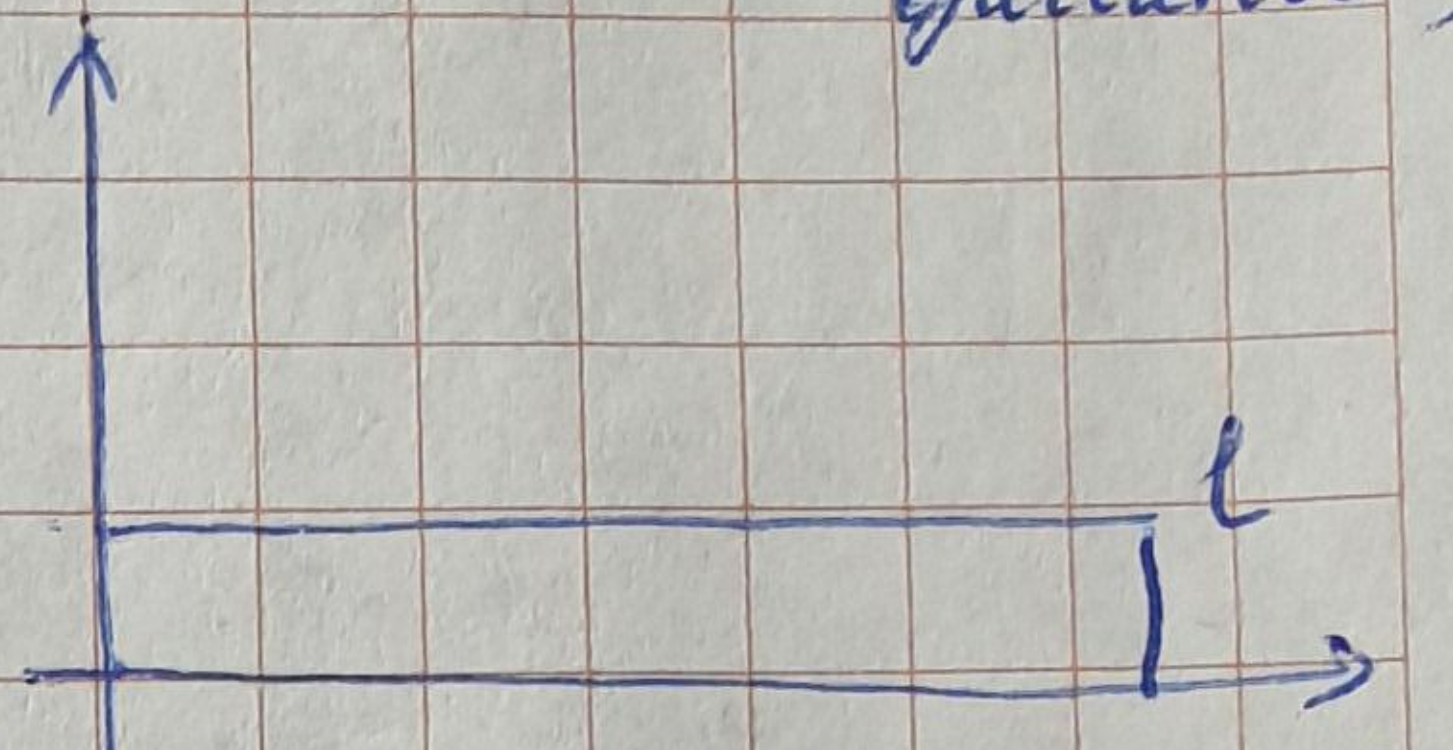
Ур-ие теплопроводности зависит от 1 переменной.

Тогда $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$; $t=0$ - нач. условие (поиск в времени)

$a, f(x, t)$ - заданы

$u(x, 0) = \varphi(x)$; $0 \leq x \leq l$

$\varphi(x)$ - задан.



Крайовые ГУ:

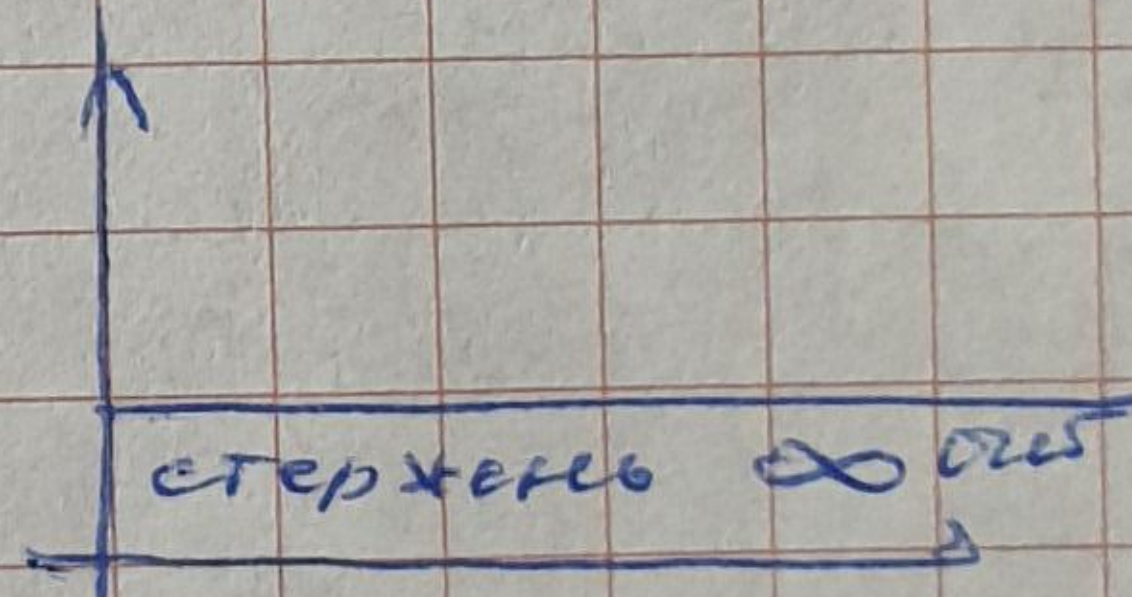
- 1) I кр. уел (КУ): $u(0, t) = \mu(t)$ - значение температуры на левом конце
- 2) II КУ: $u_x(0, t) = \nu(t)$ - значение температурного потока
- 3) III КУ: $u(0, t) + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \theta(t)$ - л. к

I КЗ:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) & 0 < x < l \\ u(0, t) = \mu_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(l, t) = \mu_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

II КЗ:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) & 0 < x < l \\ u_x(0, t) = \nu_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = \nu_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$



Задача на полуинfinite:

I КЗ:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & x > 0; 0 < t \leq T \\ u(0, t) = \mu(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \end{cases}$$

II КЗ:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & x > 0; 0 < t \leq T \\ u_x(0, t) = \nu(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x); & x \geq 0 \end{cases}$$

ЗК III

ЗК (на функции) ;

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t); & -\infty < x < +\infty; & 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x); & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

4. Метод разделения переменных для ρ -во
 $\nabla^2 u = 0$ для КЗ для ур-ий теплопроводности.

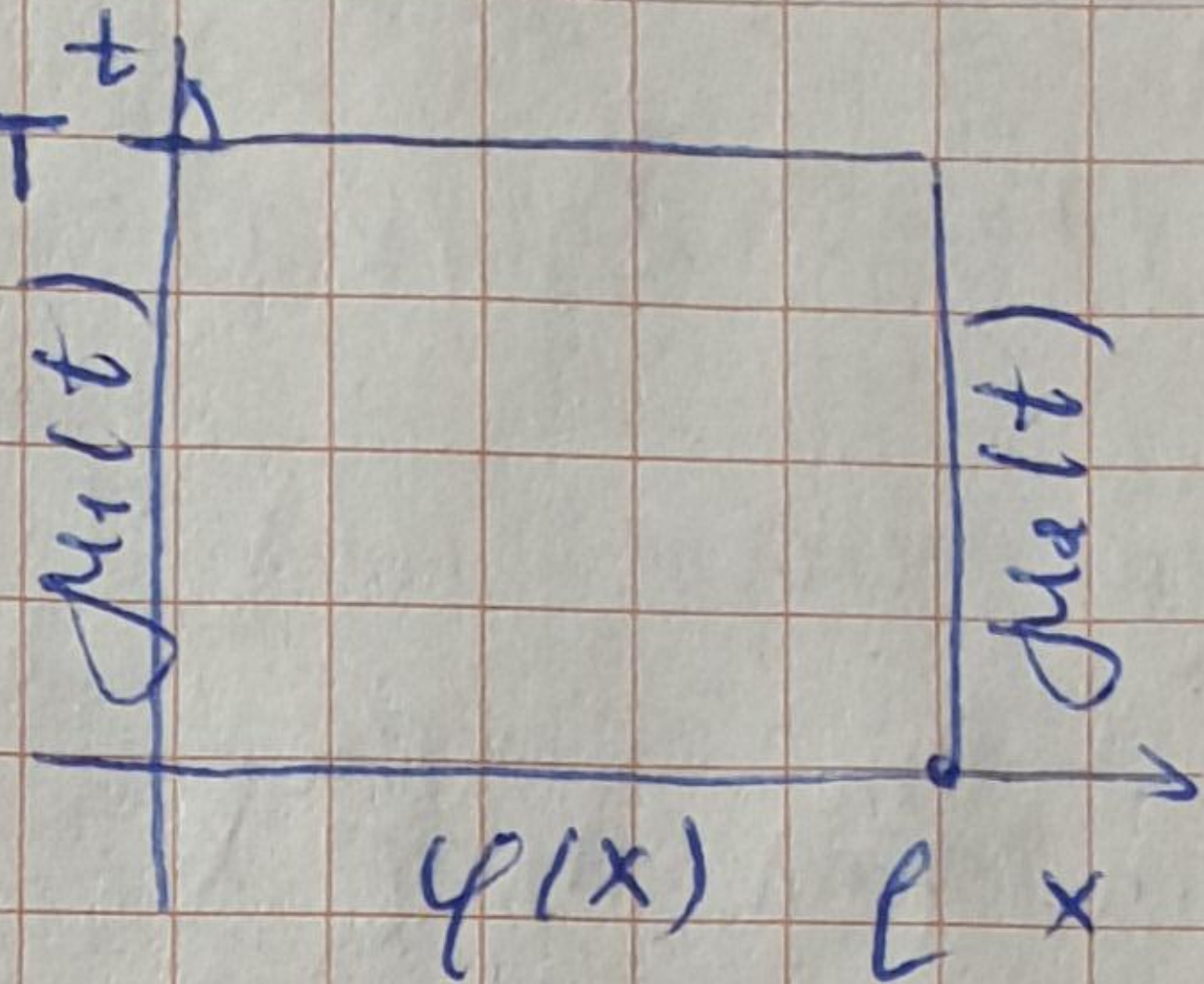
ИЗ: 1) $u_t(x, t) = a^2 u_{xx}$; $0 < x < l$; $0 < t \leq T$

2) $u(0, t) = \mu_1(t)$

3) $u(l, t) = \mu_2(t)$ $0 \leq t \leq T$

4) $u(x, 0) = \varphi(x)$ $0 \leq x \leq l$

Дано: $a, \mu_1, \mu_2, \varphi \rightarrow$ н-ти $u(x, t)$



$G = \{(x, t); 0 < x < l; 0 < t \leq T\}$

Опр Ф-я $u(x, t)$ называется решением ИЗ 1-4, если

1) $u \in C[\bar{G}]$

2) $u \in C^{2,1}[\bar{G}]$ т.е. $u, u_x, u_{xx}, u_t \in C[\bar{G}]$

3) $u(x, t)$ удов. 1-4

Необходимые условия разделения: $\mu_1(0) = \varphi(0)$
 $\mu_2(0) = \varphi(l)$

• Метод разделения переменных:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 u_{xx} & (x, t) \in G \\ u(0, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(l, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

неприменимо

Ищем решение в виде $u(x, t) = X(x) T(t)$

$T'(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x)$

$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

A $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; 0 \leq x \leq l \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$

Получим $\lambda_{n, n=1, 2, \dots}$. Найдём такие λ , чтобы система имела нетрив. р-и.

B $T'(t) + a^2 T(t) \lambda = 0; 0 \leq t \leq T$

Перепишем λ_n с **A**
 $T'_n(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0$

$T_n = C_n \exp(-a^2 \lambda_n t)$

A $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N} - \text{e. 3.}$
 $X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right); n \in \mathbb{N} - \text{e. 4}$

$U(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) - \text{yrob. 1-3}$

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n}_{\sim C_n} \cdot \underbrace{C_n}_{\sim C_n} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \exp\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right)$

хотим найти $u(x, t)$ yrob. 4, т.е. $u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx = \begin{cases} l/2, & m=n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

ортогональность по $\sin(\pi m/l)x$ и $\int_0^l$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) dx = \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) dx$

$C_m = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) dx$ - найдем C_n

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \left[\int_0^l \varphi(s) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right) ds \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \exp\left(-a^2 t \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) - 5$
 4-е изл. I к3.

П(7) $\varphi \in C^1[0, l], \varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Тогда $u(x, t)$ опреф 4-м 5 ибл. рел. I к3:

D-во:

$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right) ds = \left\{ \int_0^l \varphi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right) ds \right\} =$
 $= \frac{2}{l} \varphi(s) \frac{-l}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right) \Big|_0^l + \frac{2\pi n}{l} \int_0^l \varphi'(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right) ds$
 0, т.к. $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

D-ем, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| e^{-\alpha} < \infty$; $|\varphi_n| = \frac{2}{\pi n} \int_0^l |\varphi'(s)| \cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right) ds$

$|\varphi_n| = \frac{2}{\pi n} \cdot \tilde{\varphi}_n \leq \{ab\} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{(\pi n)^2} + \tilde{\varphi}_n^2 \right)$

$|\varphi_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{(\pi n)^2} + \tilde{\varphi}_n^2 \right)$ - по признаку Вейерштрасса по перв-ву бесконечности

$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| e^{-\alpha}$

D-ем, что $u(x, t) \in C[\bar{Q}]$

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t)$

1) $\vartheta_n(x, t) \in C[\bar{Q}]$ then $N \sin, \exp$ не пр. + ...

2) D-есть, что ϑ_n эк-ва $\forall (x, t) \in \bar{Q}$

$|\vartheta_n(x, t)| \leq \tilde{\vartheta}_n$; $\forall (x, t) \in \bar{Q}$ и $\sum \tilde{\vartheta}_n$ эк-ва, то $\sum \vartheta_n$ эк-ва

$|\vartheta_n(x, t)| \leq |\varphi_n| \Rightarrow \sum \vartheta_n(x, t)$ эк-ва по признаку Вейерштрасса.

Из 1, 2) $\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x, t) \in C[\bar{Q}]$

$\Rightarrow \{ (x, t); 0 \leq x \leq l; 0 \leq t_0 \leq t \leq T \} \forall t_0 > 0$
 Если р-ва, что $u \in C^{2,1}[\bar{Q}_{t_0}]$, то $u \in C^{2,1}[\bar{Q}]$

и в силу произвольности t_0

Для $u(x, t)$: $u(x, t) = a^2 u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \underbrace{\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)}_{\vartheta_n} \sin \frac{\pi n}{l} x \exp\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right)$

$\left| \frac{\partial \vartheta_n}{\partial t}(x, t) \right| \leq |\varphi_n| \cdot \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) a^2 \exp\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t_0\right)$

$\forall (x, t) \in \bar{Q}_{t_0} \quad n^2 \exp(-An^2) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow$ эк-ва, $u \in C^{2,1}[\bar{Q}_{t_0}]$

Для $u_{xx}(x, t)$ из аналог. рассуждений $\Rightarrow u_{xx}(x, t)$

$a^2 u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) a^2 \exp\left(-a^2 t \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)$

$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \leq |\varphi_n| \cdot \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) a^2 \exp\left(-a^2 t \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}$
 $n^2 \exp(-An^2) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow$ эк-ва $\Rightarrow u_{xx} \in C[\bar{Q}_{t_0}]$

$u(x, t)$ удовлет

$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \parallel \sin \frac{\pi n}{l} x \parallel \Rightarrow$ удовлет 2, 3

Гиб. $u(x, t) \in C^{\infty}[\bar{Q}]$

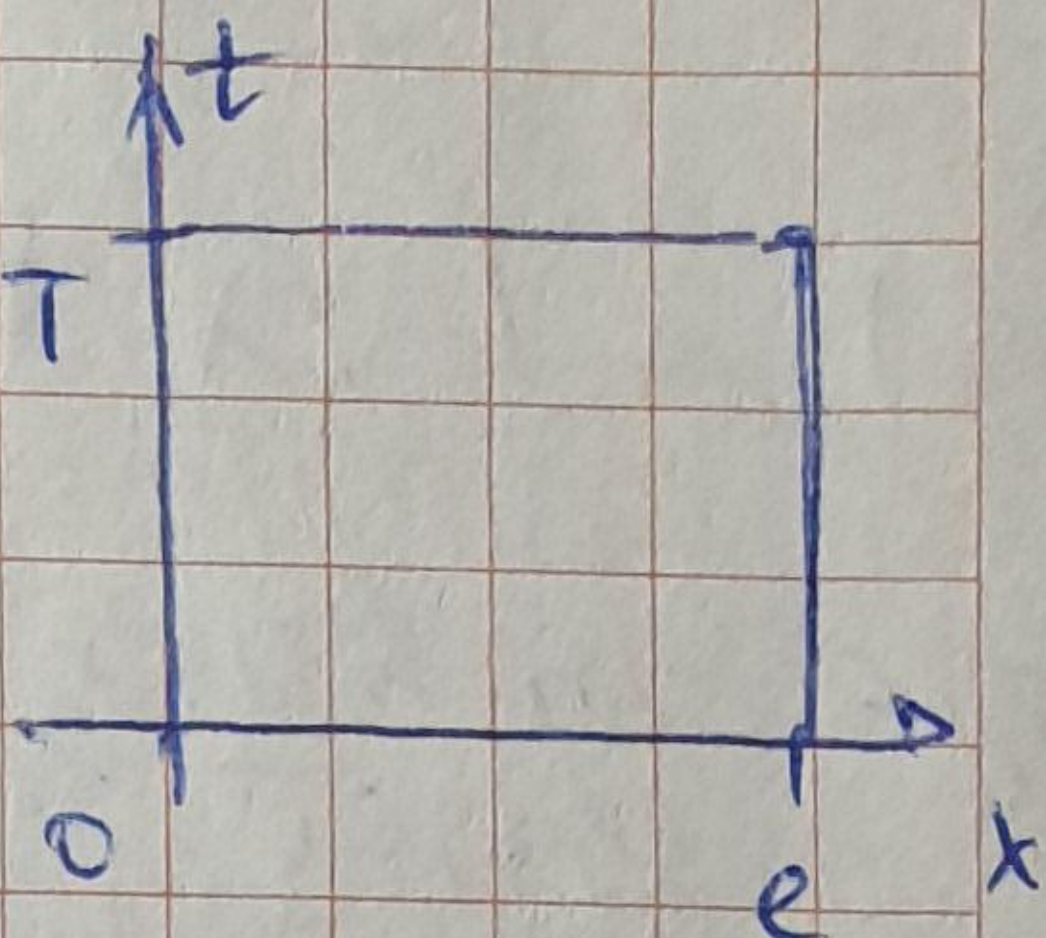
$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x$

b-то: $p, q: \left| \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial t^q}(x, t) \right| \leq |\varphi_n| \left(\frac{\pi n}{l}\right)^p \cdot \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)^q a^{2q} \exp\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right) \sim e^{-An^2} n^p n^{2q} \rightarrow 0$

5. Принцип максимума для ур-ий теплопроводности

$$G = \{(x, t); 0 < x < l; 0 < t \leq T\}$$

$$\Gamma = \overline{G} \setminus G$$



И (Принцип максимума для ур-ий)

$u(x, t) \in C[\overline{G}]$; $u(x, t) \in C^{2,1}[G]$ и
удовл. ур-ию теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$; $(x, t) \in G$

Тогда 1) $\max_{(x, t) \in G} u(x, t) = \max_{(x, t) \in \Gamma} u(x, t)$

2) $\min_{(x, t) \in G} u(x, t) = \min_{(x, t) \in \Gamma} u(x, t)$

Д-во: 1) От противного:
1) $\max_{(x, t) \in \Gamma} u(x, t) = M$ и $\exists (x_0, t_0) \in G: u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$
 $\varepsilon > 0$

$\exists v(x, t) = u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T} (t - t_0)$; $\max_{\Gamma} v(x, t) \leq \begin{cases} \max_{t=t_0} u(x, t) = M \\ \leq T, \text{ и } k \\ t, t_0 \in [0, T] \end{cases}$

$\leq M + \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall (x_0, t_0) = u(x_0, t_0) - \frac{\varepsilon}{2T} (t_0 - t_0) = u(x_0, t_0)$, где $t_0 \in (0, T]$
 $\Rightarrow \exists (x_1, t_1)$, где $v(x, t)$ достигает максимума
 $x_0 \in [0, l]$
не нужно, как по идее

Необходимое усл. максимума: $\begin{cases} v_t(x_1, t_1) \geq 0 \\ v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \\ u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \end{cases}$

и вписанное ур-е теплопроводности
 $u_t(x_1, t_1) = a^2 u_{xx}(x_1, t_1)$ $(x_1, t_1) \in G$
 $\downarrow$ $\uparrow$
 0 0

погрешное предположение $\Rightarrow \max_{(x,t) \in \bar{G}} u(x,t) = \max_{(x,t) \in \Gamma} u(x,t)$

$$2) \Delta v(x,t) = -u(x,t) \Rightarrow \max_{(x,t) \in \bar{G}} v(x,t) = \max_{(x,t) \in \Gamma} v(x,t)$$

Тогда $\min_{(x,t) \in \bar{G}} u(x,t) = \min_{(x,t) \in \Gamma} u(x,t)$ $\square$

Из $T \Rightarrow$ температура стержня внутри не
может $> u$ и на краях стержня.

6! и устоячивость решения I-кз ^{для ур-ий теплопроводности}

Т! реш I-кз для ур-ий теплопроводности.

$\exists u_i(x, t); i=1, 2$ т.ч: $u_i \in C[\bar{G}]$; $u_i \in C^{2,1}[G]$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} & 0 < x \leq l \\ & 0 < t \leq T \end{cases}$$

$$u_i(0, t) = f_1(t)$$

$$u_i(l, t) = f_2(t)$$

$$u_i(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

Тогда $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в $\bar{G}$

Д-во: $\Delta v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t); v \in C[\bar{G}]; v \in C^{2,1}[G]$

$$\begin{cases} v_t = a v_{xx} & \text{принцип максимума} \\ v(0, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ v(l, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ v(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max_{(x,t) \in \bar{G}} v(x, t) = \max_{(x,t) \in \bar{G}} v(x, t) = 0 \\ \min_{(x,t) \in \bar{G}} v(x, t) = \min_{(x,t) \in \bar{G}} v(x, t) = 0 \end{cases}$$

так как на границе v не > 0

$$\Rightarrow v(x, t) = 0 \text{ в } \bar{G} \Rightarrow u_1(x, t) = u_2(x, t); (x, t) \in \bar{G}$$

Устойчивость решения I-кз

Лемма: $\exists u_i(x, t); i=1, 2$ т.ч $u_i(x, t) \in C[\bar{G}]$
 $u_i \in C^{2,1}[G]$ и ур-ие теплопроводности.
 $u_1(x, t) \geq u_2(x, t) \quad (x, t) \in \bar{G}$

Тогда $u_1(x, t) \geq u_2(x, t); (x, t) \in \bar{G}$

Д-во: $\Delta u_1(x, t) - \Delta u_2(x, t) = v(x, t); v \in C[\bar{G}]; v \in C^{2,1}[G]$

$$\begin{cases} v_t = a v_{xx}; (x, t) \in G \\ v(x, t) \geq 0 \quad (x, t) \in \bar{G} \end{cases}$$

Принцип минимума макс. значений:

$$\min_{(x,t) \in \bar{G}} v(x, t) = \min_{(x,t) \in \bar{G}} v(x, t) \geq 0 \Rightarrow u_1(x, t) \geq u_2(x, t) \quad (x, t) \in \bar{G}$$

т.е. если у первого ур-ия решение u_1 , то и второе ур-ие u_2 будет решением

1) yepač raboča $\therefore \{u_i(x, t) : u_i \in C[\bar{Q}], u_i \in C^{2,1}[Q]\}$ $i=1,2$

$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$ $(x, t) \in G = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ u ypo6a. yp-uro.

$\begin{cases} u_i(0, t) = \mu_{i1}(t) \\ u_i(l, t) = \mu_{i2}(t) \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$

Teop.

$\max_{(x,t) \in \bar{G}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| = \max_{t \in [0, T]} \{ \max | \mu_{11}(t) - \mu_{12}(t) | ;$

$\max_{t \in [0, T]} | \mu_{21}(t) - \mu_{22}(t) | ; \max_{x \in [0, l]} | \varphi_1(x) - \varphi_2(x) | \} = M \geq 0$

D-60:

$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t), v \in C[\bar{Q}], v \in C^{2,1}[Q]$

$v_t = a^2 v_{xx}, (x, t) \in G$
 $|v(x, t)| \leq M, (x, t) \in \Gamma$

$\begin{cases} v^+(x, t) = M \\ v^-(x, t) = -M \end{cases}; \quad v^\pm \in C[\bar{Q}], v^\pm \in C^{2,1}[Q]$
 $u v^\pm(x, t) = a^2 v_{xx}^\pm(x, t)$

$v(x, t) \leq v^+(x, t); (x, t) \in \Gamma \Rightarrow v(x, t) \leq v^+(x, t) = M, (x, t) \in \bar{G}$ no nemye
 $v^-(x, t) \leq v(x, t); (x, t) \in \Gamma \Rightarrow v(x, t) \geq v^-(x, t) = -M, (x, t) \in \bar{G}$ no nemye

$\Rightarrow |v(x, t)| \leq M, (x, t) \in \bar{G}$ $\square$

7 ! заменим условие КЗ при гр-ид
матрице $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$

Вспомогат. КЗ:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x, t) \in G \\ \alpha_1 u(0, t) - \beta_1 u_x(0, t) = \nu_1(t) \\ \alpha_2 u(l, t) + \beta_2 u_x(l, t) = \nu_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad \begin{matrix} \alpha_i \geq 0 \\ \beta_i \geq 0 \quad i=1,2 \\ \alpha_i + \beta_i > 0 \end{matrix}$$

+! : $\exists u_i(x, t) \quad i=1,2 : u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x} \in C[\bar{G}] ; u_i \in C^{3,1}[\bar{G}]$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} & (x, t) \in G \\ \alpha_1 u_i(0, t) - \beta_1 \frac{\partial u_i(0, t)}{\partial x} = \nu_1(t) \\ \alpha_2 u_i(l, t) + \beta_2 \frac{\partial u_i(l, t)}{\partial x} = \nu_2(t) \\ u_i(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l$$

м.с. $u_i(x, t)$ удовлетв. условиям КЗ $i=1,2$

Тогда : $u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad (x, t) \in G$

Д-во : $\sigma(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) ; \sigma, \sigma_x \in C[\bar{G}] ; \sigma \in C^{3,1}[\bar{G}]$

$$\begin{cases} \sigma_t = a^2 \sigma_{xx} & (x, t) \in G \\ \alpha_1 \sigma(0, t) - \beta_1 \sigma_x(0, t) = 0 \\ \alpha_2 \sigma(l, t) + \beta_2 \sigma_x(l, t) = 0 \\ \sigma(x, 0) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

X-ммы ρ -то, что $\sigma(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{G}$:

$$\int_0^l \int_0^t 2\sigma(x, \tau) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}(x, \tau) d\tau dx = a^2 \int_0^l \int_0^t 2\sigma(x, \tau) \sigma_{xx}(x, \tau) d\tau dx$$

$\frac{\partial}{\partial \tau} (\sigma^2(x, \tau))$ по частям

$$\int_0^l [\sigma^2(x, t) - \sigma^2(x, 0)] dx = 2a^2 \int_0^t \left[\sigma(x, \tau) \cdot \sigma_x(x, \tau) \right]_{x=0}^{x=l} d\tau - 2a^2 \int_0^t \int_0^l (\sigma_x(x, \tau))^2 dx d\tau$$

$$\int_0^l \sigma^2(x, t) dx + 2a^2 \int_0^t \int_0^l (\sigma_x(x, \tau))^2 dx d\tau = 2a^2 \int_0^t \left[\sigma(x, \tau) \sigma_x(x, \tau) \right]_{x=0}^{x=l} d\tau$$

хочу ρ -то, что $\sigma = 0$

$$1) x=0: 2a^2 \int_0^t \sigma(0, \tau) \cdot \sigma_x(0, \tau) d\tau = A$$

$$\Delta \beta_1 = 0 \Rightarrow \sigma(0, t) = 0, \text{ mo } A = 0$$

$$\beta_1 > 0 \Rightarrow \sigma_x(0, t) = \alpha_1 \sigma(0, t) / \beta_1 \Rightarrow A = 2a^2 \int_0^t \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \sigma(0, \tau) \right)^2 d\tau \geq 0$$

$$2) x=l: -2a^2 \int_0^t \sigma(l, \tau) \cdot \sigma_x(l, \tau) d\tau = B$$

$$\beta_2 = 0 \Rightarrow \sigma(l, t) = 0, \text{ mo } B = 0$$

$$\beta_2 > 0 \Rightarrow \sigma_x(l, t) = -\alpha_2 / \beta_2 \sigma(l, t), \text{ mo } 2a^2 \int_0^t \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2} \sigma^2(l, \tau) d\tau \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^l \sigma^2(x, t) dx + 2a^2 \int_0^t \int_0^l (\sigma_x(x, \tau))^2 dx d\tau - 2a^2 \int_0^t \left[\sigma(x, \tau) \sigma_x(x, \tau) \right]_{x=0}^{x=l} d\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{вс } \int = 0, \text{ в том числе } I_1 = 0 \Rightarrow \sigma(x, t) = 0 \quad \blacksquare$$

8. ! при ЗК при ур-ии теплопроводности

ЗК:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty; t \in E^+ = (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Нужно н-ти $u(x, t)$

Ищем решение в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)a^2} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$X(x) = \exp(i\lambda x)$$

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0$$

$$T(t) = C \exp(-(\lambda a)^2 t)$$

$$u(x, t) = C e^{-\lambda^2 a^2 t} e^{i\lambda x}; u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \Rightarrow c(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-i\lambda s} ds$$

$$\text{Тогда } u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-i\lambda s} ds \right) e^{-\lambda^2 a^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda$$

Используем ФТ

$$\text{Получим: } u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(s) ds$$

$$\text{Или переписав } u(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, s, t) \varphi(s) ds & |x| < \infty, t > 0 \\ \varphi(x) & |x| < \infty, t = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F(\cdot)}: \mathcal{D} u_i(x, t); i=1, 2: u_i \in C(E \times E^+)$$

$$u_i \in C^{2,1}(E \times E^+)$$

$$\text{и ур-ии ЗК: } \frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad x \in E; t \in E^+$$

$$u_i(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in E$$

$$\text{К тому же } |u_i(x, t)| \leq M; \quad x \in E; t \in E^+$$

$$\text{Тогда } u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad x \in E; t \in E^+$$

Д-во:

$$\mathcal{D} v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

$$v \in C(E \times E^+); v \in C^{2,1}(E \times E^+)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} & (x, t) \in E \times E^+ \\ \sigma(x, 0) = 0 & x \in E \end{cases}$$

$$\bullet |\sigma(x, t)| \leq M_1 + M_2 \leq M \quad (x, t) \in E \times E^+$$

$$\exists \exists (x_0, t_0): t_0 > 0 \text{ и } \sigma(x_0, t_0) \neq 0$$

$$\exists u_1(x, t) > u_2(x, t) \quad (\text{если это не так, то меняем местами } u_1(x, t) \text{ и } u_2(x, t))$$

$$\text{Тогда } \sigma(x_0, t_0) = \varepsilon > 0$$

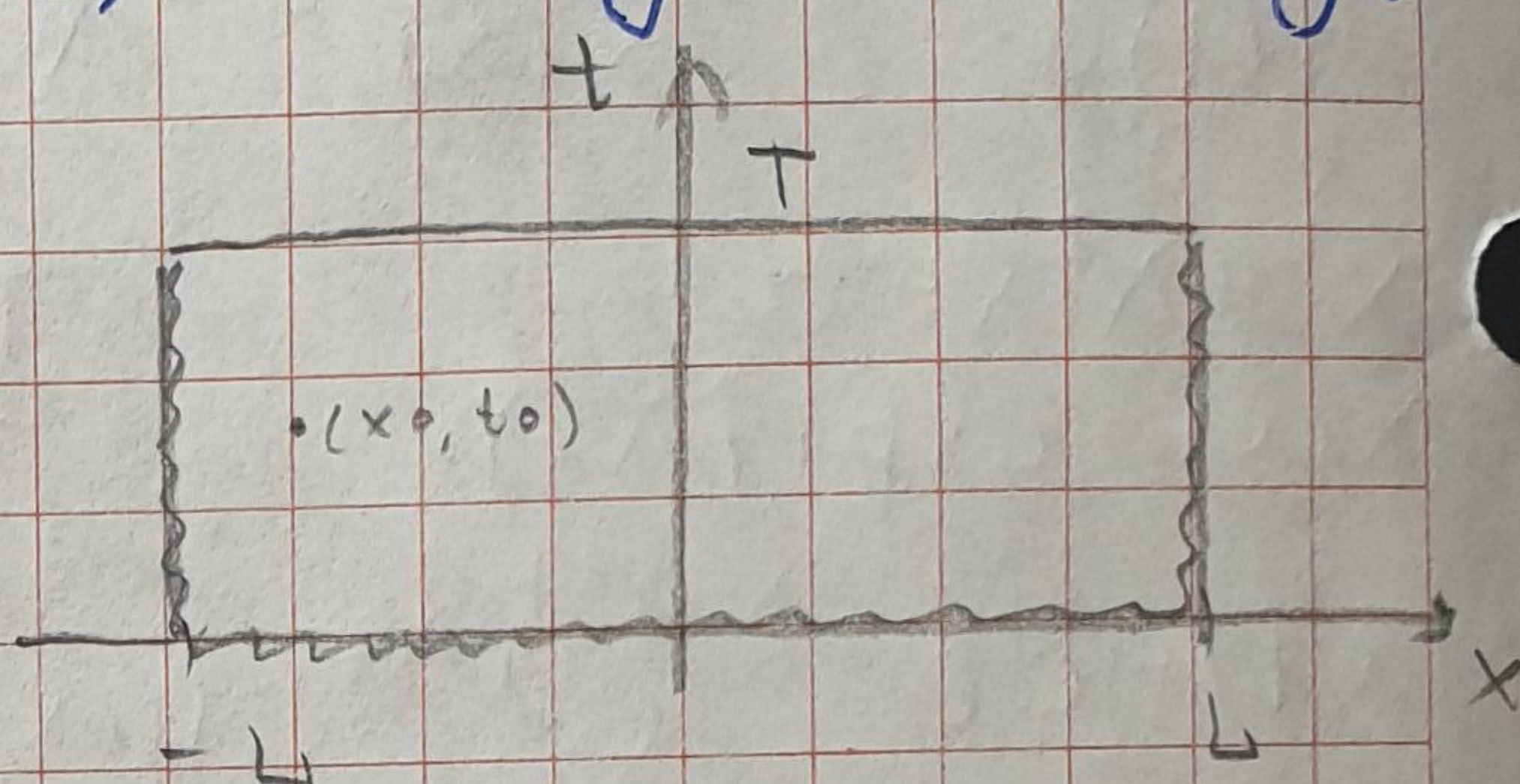
$$\text{Возьмем } G_L = \{ (x, t) : |x| < L ; 0 < t \leq T \} : (x_0, t_0) \in G_L$$

$$\bar{G}_L = \bar{G}_L \setminus G_L$$

$$\Delta w(x, t) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$$

$$w \in C(\bar{G}_L); w \in C^{2,1}(G_L)$$

$$w_t = a^2 w_{xx} \text{ в } G_L$$



Из принципа максимума: Если $w(x, t) \geq \sigma(x, t)$ на $\bar{G}_L$, то $w(x, t) \geq \sigma(x, t)$ на G_L

$$\bullet \text{ на } \bar{G}_L \quad \left(\begin{aligned} &|\sigma(-L, t)| \leq M \quad t > 0 \\ &w(\pm L, t) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{L^2}{2} + a^2 t \right) = M + \frac{2Ma^2 t}{L^2} > M \end{aligned} \right) \Rightarrow \text{выполнено это}$$

$$\text{Тогда: } 0 < \varepsilon = \sigma(x_0, t_0) \leq w(x_0, t_0) = \frac{2M}{L^2} \left(\frac{x_0^2}{2} + a^2 t_0 \right)$$

$$L \rightarrow \infty \Rightarrow w(x_0, t_0) \rightarrow 0, \text{ но } w(x_0, t_0) \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow$$

$$\text{Противоречие } \Rightarrow u(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in (E \times E^+)$$

9 Дана ЗК для ур-на теплопроводности

ЗК:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

1 $u_t = a^2 u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \in (0, +\infty)$

2 $u(x, 0) = \varphi(x)$

Нужно найти $u(x, t)$:

Ищем решение в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$

• $X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$

• $\frac{T'(t)}{T(t)a^2} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$

$X'' + \lambda^2 X = 0$

$X(x) = \exp(i\lambda x)$

$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0$

$T(t) = C \exp(-(\lambda a)^2 t)$

• $u(x, t) = C \cdot e^{-\lambda^2 a^2 t} \cdot e^{i\lambda x}$ $u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda$

• $u(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda \xrightarrow{\text{преобразование Фурье}} C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-i\lambda s} ds$

Тогда $u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-i\lambda s} ds \right) e^{-\lambda^2 a^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda$

Хотим избавиться от λ [вспомогательный интеграл, под]:

Получим:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(s) ds$$

Обозначим за $G(x, s, t)$

Определим ф-ию $u(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) \varphi(s) ds & |x| < \infty, t > 0 \\ \varphi(x) & |x| < \infty, t = 0 \end{cases}$ **3**

T(3): $\exists \varphi \in C(E), |\varphi(x)| \leq M \quad \forall x \in E$. Тогда

ф-я $u(x, t)$ определена формулой **3** т.ч

1. $u \in C[E \times E^+]$

2. $u \in C^{2,1}[E \times E^+]$

3. $u(x, t)$ ур-на **1, 2** в $E \times E^+$

4. $|u(x, t)| \leq M \quad \forall (x, t) \in E \times E^+$

D-во: D-ем, что $\forall$ фикс s $G(x, s, t)$ убл ф-я **1**

$$g_t(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) + \frac{1}{t^2} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \cdot \frac{(x-s)^2}{4a^2 t^2} \right)$$

$$g_x(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \cdot \left(-\frac{2(x-s)}{4a^2 t}\right)$$

$$g_{xx}(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \cdot \frac{4(x-s)^2}{(4a^2 t)^2} - \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \cdot \frac{2}{4a^2 t} \right)$$

Подставим, получим:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} + \frac{1}{t^2} \cdot \frac{(x-s)^2}{4a^2 t^2} = \frac{a^2}{\sqrt{t}} \left(\frac{4(x-s)^2}{(4a^2 t)^2} - \frac{2}{4a^2 t} \right)$$

$\Rightarrow$ g удовлетв. ур-ию теплопроводности.

Д-ем, что $u(x, t) \in C(E \times E^+)$ и $u(x, t) \in C(E \times E^+)$

Вспомогат. $\tilde{G} = \{(x, t) : |x| < L, 0 < t_0 \leq t \leq T\}$

Если $\varphi \in C(\tilde{G})$, то $u \in C(E \times E^+)$

$$|g(x, s, t) \varphi(s)| \leq F(s) \quad \begin{cases} 1/\sqrt{4a^2 t_0} \cdot 1 \cdot M; & |s| \leq L, (x, t) \in \tilde{G} \\ 1/\sqrt{4a^2 t_0} \cdot M \cdot \exp\left(-\frac{(L-s)^2}{4a^2 T}\right); & s \geq L \\ 1/\sqrt{4a^2 t_0} \cdot M \cdot \exp\left(-\frac{(-L-s)^2}{4a^2 T}\right); & s \leq -L \end{cases}$$

$$|g(x, s, t) \varphi(s)| \leq F(s) \quad \forall (x, t) \in \tilde{G}; s \in E$$

$F(s)$ максимиз. $g(x, s, t)$

Д-ем, что $F(s)$ ex-ца. Это так, что на ∞ φ -а убывает, как

e^{-s^2} $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds$ ex-ца и $g(x, s, t) \varphi(s) \in C(\tilde{G}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, s, t) \varphi(s) ds$ labн. ex-ца $\Rightarrow u(x, t) \in C(\tilde{G})$

Д-ем, что $u \in C^{2,1}(\tilde{G})$

$$u_t(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) + \frac{1}{t^2} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \cdot \frac{(x-s)^2}{4a^2 t^2} \right) \varphi(s) ds$$

$$|K(x, s, t)| \leq F(s) \left[\frac{1}{2t_0} + \frac{1}{4a^2 t_0^2} \cdot (L^2 + 2L|s| + s^2) \right] = F(s) \cdot \frac{\varphi(s)}{|\varphi(s)|} \leq M$$

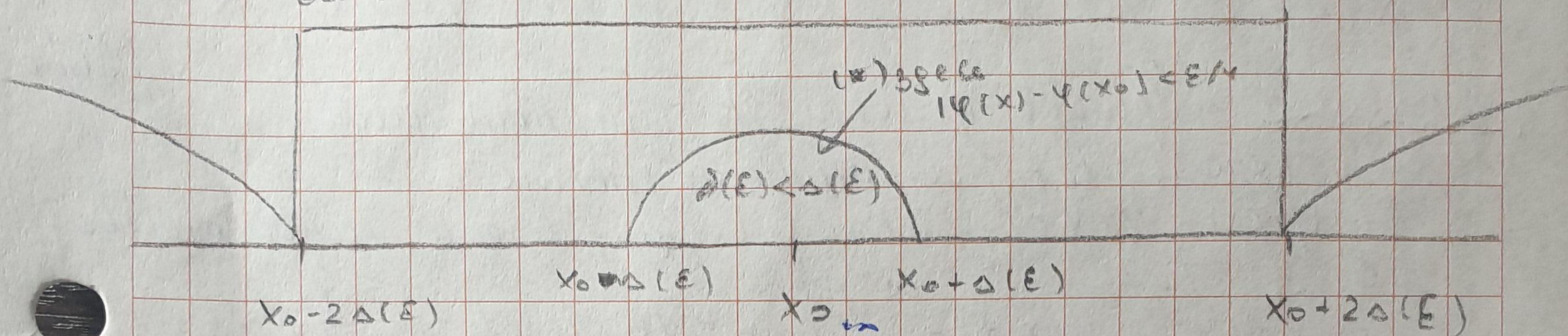
$$\text{Тогда } u_t(x, t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, s, t)| |\varphi(s)| ds \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds < \infty$$

$\Rightarrow u_t(x, t) \in C(\tilde{G})$

Для $u_{xx}(x, t)$ аналогично

Остановь р-то, что $u(x, t) \in C(E \times E^+)$, т.е.
 $\forall x_0 \in E \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0^+}} u(x, t) = \varphi(x_0)$

$\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : (x - x_0)^2 + t^2 < \delta^2(\varepsilon) \Rightarrow |u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$
 Тогда $\circ x_0$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon)$ невр $\varphi(x) \Rightarrow \exists \Delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \Delta(\varepsilon)$
 $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon/4$ $|x - x_0| < \Delta(\varepsilon)$



$$\Delta |u(x, t) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{x_0 - 2\Delta(\varepsilon)}^{x_0 + 2\Delta(\varepsilon)} g(x, s, t) [\varphi(s) - \varphi(x_0)] ds \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{x_0 - 2\Delta(\varepsilon)} g(x, s, t) \cdot 2M ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{x_0 - 2\Delta(\varepsilon)}^{x_0 + 2\Delta(\varepsilon)} g(x, s, t) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds}_{I_2} + \underbrace{\int_{x_0 + 2\Delta(\varepsilon)}^{+\infty} 2M g(x, s, t) ds}_{I_3}$$

$$\circ I_2 \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{x_0 - 2\Delta(\varepsilon)}^{x_0 + 2\Delta(\varepsilon)} g(x, s, t) ds \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, s, t) ds = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\circ I_1 = 2M \int_{-\infty}^{-\frac{\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}} g(x, s, t) ds = \int_{-\infty}^{-\frac{\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}} \frac{1}{\sqrt{4a^2t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right) ds = 2M \int_{-\infty}^{-\frac{\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) dz \leq$$

$$\text{из } 2 \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}} e^{-z^2} dz \leq \dots < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\circ I_3 \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2t}} ds = \int_{\frac{\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) dz =$$

$$= \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \leq \left\{ x = x_0 + \Delta(\varepsilon) \right\} \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz < \frac{\varepsilon}{4}$$

$\Rightarrow u \in C(E \times E^+)$

Следствие 1: из $\varphi \in C(E)$, $|\varphi(x)| \leq M \Rightarrow \text{оп. } u(x, t)$:

$$|u(x, t)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, s, t)| |\varphi(s)| ds \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, s, t)| ds = M$$

Следствие 2: $u(x, t) \in C^\infty(E \times E^+)$:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k \partial t^m}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^p g}{\partial x^k \partial t^m}(x, s, t) \varphi(s) ds \quad \begin{matrix} k+m=p \\ \text{т.е. в } \int \text{ не вст.} \\ \text{равн-0.} \end{matrix}$$

Следствие 3: Принимая условие 3k, мы получаем
"бесконечная" скорость распространения тепла.

Если $\varphi(x) = u(x, 0)$ равно 0 везде, кроме некой окрестности $[a, b]$. Тогда

$$u(x, t) = \int_a^b g(x, s, t) \varphi(s) ds > 0 \quad \begin{matrix} \forall t > 0 \\ \forall x \in E \end{matrix}$$

10. Метод гидроаэрирования жидкостей ИИИ КЗ
Зад. Турция температурности на полуприемной.

I КЗ на " — "

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} \quad , \quad x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Если моя хитрость, чтобы
раскрасить одно негр $\Rightarrow$
не хитро, чтобы $\varphi(1) = 0$ -
условие совместности

Δ Вспомогательную СК для $U(x, t)$:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} & ; |x| < \infty, t > 0 \\ U(x, 0) = \phi(x) & |x| < \infty \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x > 0 \\ -\psi(-x) & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{— нечетно}$$

$$] \quad u(x, t) = U(x, t), \quad x \geq 0, t \geq 0$$

Убедился, что $u(x, t)$ уровн 1-3

1. $\forall$ исходя из опр $\nabla(x, t)$

3. $V \cup (x, 0) = \varphi(x) \quad x \geq 0$

2 проверки КУ:

2 проверка КУ:

$$u(0,t) = \psi(0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \phi(s) ds = 0$$

чет. нечет ↗

$$\bullet \text{ u(x, t) = U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \phi(s) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \psi(s) ds + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) (-\psi(s)) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right) \right) \varphi(s) ds$$

Это и есть реш I к 3 на 1

II КЗ:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x > 0 \end{cases}$$

4. Вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} & |x| < \infty, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x) & |x| < \infty \end{cases}; \quad \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0 \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases} \quad \text{четно}$$

$$u(x, t) = U(x, t) \quad \forall x \geq 0, t \geq 0$$

1, 3 выполнено:

$$\begin{aligned} 2: U_x(0, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(-\frac{2(x-s)}{4a^2 t} \right) \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \Phi(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}}_{\text{нечет}} \cdot \underbrace{\frac{2s}{4a^2 t}}_{\text{чет}} \underbrace{\exp\left(-\frac{s^2}{4a^2 t}\right)}_{\text{чет}} \underbrace{\Phi(s)}_{\text{чет}} ds = 0 \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(s) ds +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(-s) ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(\right.$$

$$\left. \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right) \right) \varphi(s) ds$$

это реш II КЗ на "т"

1.1. $\int_{\text{по}}^{\text{по}} \text{неформальное решение I КЗ}$
 $\text{сп-ва теплопроводности}$

I КЗ:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l; 0 < t \leq T \\ u(0, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(l, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad l = L$$

Решение: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{L} s ds \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a^2 t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x$

$\exists g(x, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi}{L} s \cdot \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a^2 t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x$ — ядро I КЗ

Тогда $u(x, t) = \int_0^L g(x, s, t) \varphi(s) ds$

св-ва:

1) $g(x, s, t) = g(s, x, t)$

2) $g_t = a^2 g_{xx} \quad x \in (0, L); t > 0$ (не определено при $t=0$)

3) Покажем, что $g(x, s, t) \geq 0 \quad \forall x, s \in (0, L) \quad t \geq 0$

Д-во:

Д-во: что g — неотрицательное $\circ (x, s_0, t)$

$\exists \varphi_\varepsilon(s) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon(s) > 0 & x \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \\ 0 & ; x \in (0, L) \setminus (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \end{cases}$

и при этом $\int_0^L \varphi_\varepsilon(s) ds = 1$ и $\varphi_\varepsilon(x) \in C[0, L]$

$u_\varepsilon(x, t)$ — решение задачи с ун. $u_\varepsilon(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x)$

$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^L g(x, s, t) \varphi_\varepsilon(s) ds = \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} g(x, s, t) \tilde{\varphi}_\varepsilon(s) ds =$

$= \{ \text{Т.о. среднее} \} = g(x, \bar{s}_\varepsilon, t) \cdot \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} \tilde{\varphi}_\varepsilon(s) ds$

$\Rightarrow g(x, \bar{s}_\varepsilon, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(x, \bar{s}_\varepsilon, t)$ "1" $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ так как $\varphi_\varepsilon \geq 0$

но при этом $u_\varepsilon(x, t) \geq 0$

$\min_{\bar{Q}} u_\varepsilon(x, t) = \min_{\bar{Q}} u_\varepsilon(x, t) \geq 0$

$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \\ u_\varepsilon(0, t) = u_\varepsilon(l, t) = 0 \\ u_\varepsilon(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \text{информат}$

$$\Rightarrow \forall \bar{g} \quad u_\varepsilon(x, t) \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x, \bar{s}, t) \geq 0$$

$$4) \quad g(x, s, t) \in C^\infty(E \times E \times E^+)$$

$D \subset \mathbb{R}^3$:

При $t > t_0$ ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса

$$|g(x, s, t)| \in \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon} \exp(-a^2 (\frac{Dn}{\varepsilon})^2 t_0)$$

- Ряд из произведений сходятся, так как при $n \rightarrow \infty$ сходятся только коэффициенты от n , но экспонента все равно убывает быстрее.

12 Ур-ия Лапласа и Пуассона. Постановка основных задач. Фундаментальное решение ур-ия Лапласа.

Ω — открытая область в E^3 , ограниченная
поверхностью Σ
 $D \subset E^2, \partial D = L$

Δ ур-ия теплопроводности:

$$u_t(x, y, z, t) = a^2 \Delta u(x, y, z, t) + f_1(x, y, z, t) \\ u_t(x, y, t) = a^2 \Delta u(x, y, t) + f_2(x, y, t) \quad (x, y) \in D; \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Стационарный процесс — $u_t = 0 \Rightarrow \Delta u = -f(x, y, z)$
 $f = F/a^2$

$$\Delta u = -f(x, y, z) \text{ — ур-ие Пуассона} \quad \Delta u = -f(x, y) \\ \Delta u = 0 \text{ — ур-ие Лапласа} \quad \Delta u = 0$$

Это ур-ие эллиптического типа: $u_{xx} + u_{yy} = -f(x, y)$
 $D = -1 < 0$.

Постановка основных задач:

E^3 внутренняя задача Дирихле для ур-ия Лапласа:
И-ти $u(x, y, z)$ т.ч. $\Delta u = 0$ в Ω
 φ -заданная т.ч. $u(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Sigma$

E^3 -внешняя задача Дирихле для ур-ия Лапласа:
И-ти $u(x, y, z)$: $\Delta u = 0$ в $E^3 \setminus \Omega$
 $u(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Sigma$

E^3 внутренняя задача Неймана для ур-ия Лапласа:
И-ти $u(x, y, z)$: $\Delta u = 0$ в Ω
 $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Sigma$

E^3 внешняя задача Неймана для ур-ия Лапласа:
И-ти $u(x, y, z)$: $\Delta u = 0$ в $E^3 \setminus \Omega$
 $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Sigma$

E^n ; $\Omega \subset E^n$ и опр φ -и $u(x_1, \dots, x_n)$

Всп φ -и $u(x_1, \dots, x_n)$ наз-я гармоническая в Ω , если $u \in C^2(\Omega)$ и ур-ие Лапласа, т.е.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \text{ в } \Omega$$

Связь между аналитическими и гармоническими φ -и

• E^2 : $u(x, y)$; $f(z)$ - аналит φ -и $z = x + iy$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Условия К-Р:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ по } x \text{ по } y$$

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{xy} = -v_{xy} \end{cases}$$

$\Delta u = 0 \Rightarrow$ u и v гармонич. φ -и

Фундаментальное решение ур-ия Лапласа в E^3 :

$R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ - расстояние в E^3 ; $M = (x, y, z)$; $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

R_{MM_0} - фундаментальное решение в E^3 . Действ. это

т.е. $\Delta (1/R_{MM_0}) = 0$ в $E^3 \setminus M_0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{R_{MM_0}^3} \cdot 2(x-x_0) = -\frac{(x-x_0)}{R_{MM_0}^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = -\frac{1}{R_{MM_0}^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{R_{MM_0}^5} \cdot (2(x-x_0))^2 = -\frac{1}{R_{MM_0}^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{R_{MM_0}^5}$$

$$\Delta \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = -\frac{3}{R_{MM_0}^5} + \frac{3(x-x_0)^2}{R_{MM_0}^5} + \frac{3(y-y_0)^2}{R_{MM_0}^5} + \frac{3(z-z_0)^2}{R_{MM_0}^5} = 0$$

• E^2 фундаментальное решение ур-ия Лапласа в E^2 :

$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ - расстояние в E^2 $M = (x, y)$; $M_0 = (x_0, y_0)$

Фундаментальное решение: $\ln 1/r_{MM_0}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (\ln r_{MM_0}) = -\frac{1}{r_{MM_0}} \left(+\frac{1}{2} \right) \frac{1}{r_{MM_0}} \cdot 2(x-x_0) = -\frac{(x-x_0)}{r_{MM_0}^2}$$

$$-\frac{(x-x_0)}{r_{MM_0}^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{(x-x_0)}{r_{MM_0}^2} \right) = -\frac{r_{MM_0}^2 - 2r_{MM_0}(x-x_0) \cdot 2(x-x_0)/r_{MM_0}^2}{r_{MM_0}^4}$$

$$= -\frac{1}{r_{MM_0}^2} + \frac{4(x-x_0)^2}{2 \cdot r_{MM_0}^4} = -\frac{1}{r_{MM_0}^2} + \frac{2(x-x_0)^2}{r_{MM_0}^4}$$

$$\Delta \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = -\frac{2}{r_{MM_0}^2} + \frac{2(x-x_0)^2}{r_{MM_0}^4} + \frac{2(y-y_0)^2}{r_{MM_0}^4} = 0 \text{ в } E^2 \setminus M_0$$

Физический смысл: есть маленький зарядик, он создает поле, $1/r_{MM_0}$ - потенциал, создаваемый зарядом.

13. 1 и 2 $\neq$ граница Грина. (векторная) $\neq$ на Грина.

Σ состоит из конечного числа неархивных $\neq$ -ов (кусочки с неархивными касательными)

$\neq$ -ла $O\Gamma$: Есть векторное поле $A(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$
 $P, Q, R \in C^1(\Sigma)$

$\neq$ -ла $O\Gamma$: $\iint_{\Sigma} (A, \vec{n}) dG = \iiint \operatorname{div} A dV$

$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$; $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\vec{n}, \operatorname{grad} u)$; $\vec{n}$ - единичный вектор

I $\neq$ -ла Грина: $u, v \in C^2(\Sigma)$; $u, v \in C^1(\Sigma)$

$u = u(x, y, z)$; $v = v(x, y, z)$ и $\vec{A} = u \operatorname{grad} v$. Тогда

$\vec{A}(x, y, z) = u \operatorname{grad} v = \{u \frac{\partial v}{\partial x}, u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial z}\}$
 Присоединяем к $\vec{A}$ $\neq$ -ла $O\Gamma$:

$\iint_{\Sigma} (A, \vec{n}) dG = \iiint \operatorname{div} A dV$

$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \frac{\partial}{\partial x} (u \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \frac{\partial v}{\partial z}) =$
 $= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + u \Delta v = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u \Delta v$

$(A, \vec{n}) = (\vec{n}, u \operatorname{grad} v) = u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}$

$\iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dG = \iiint (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) dV + \iiint u \Delta v dV$

I $\neq$ -ла Грина: $\iiint u \Delta v dV = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dG - \iiint (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) dV$ [1]

можно взять

$\vec{A} = v \operatorname{grad} u$. Тогда I $\neq$ -ла Грина:

[2] $\iiint_{\Sigma} v \Delta u dV = \iint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dG - \iiint (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u) dV$

Возьмем

[1] - [2]

$\iiint_{\Sigma} u \Delta v - v \Delta u dV = \iint_{\Sigma} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) dG = 0$ II $\neq$ -ла Грина

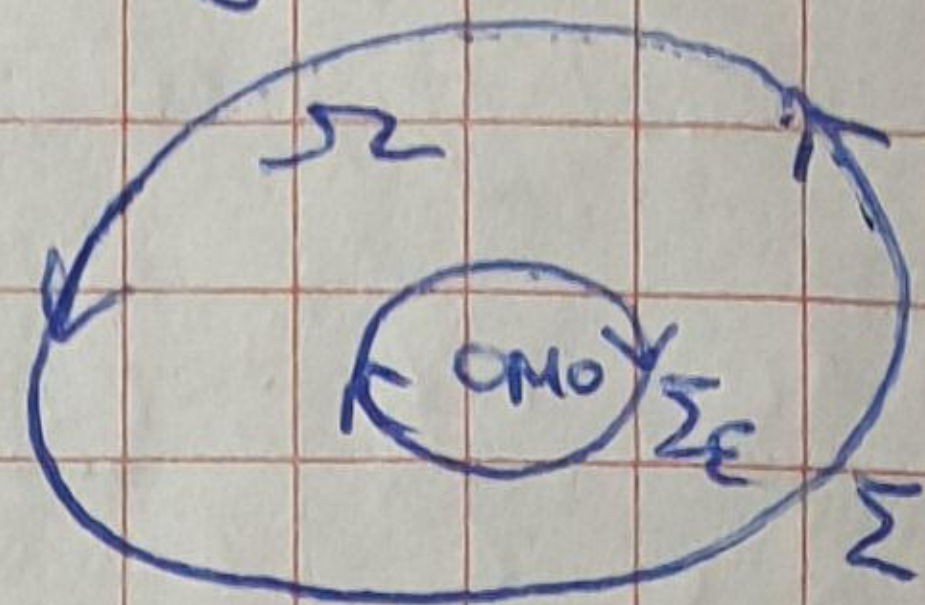
III - основная ф-ла Грина: $\oint u$ - обобщенная, а $\oint$ - функция

$$\oint = \frac{1}{R_{M_0}}$$

Введем Σ_ϵ для того чтобы выкинуть особую M_0

$$\Sigma_\epsilon: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \epsilon^2$$

Σ_ϵ - сфера Σ снаружи и Σ_ϵ изнутри



II Ф-ла Грина для области Σ_ϵ :

$$1. \iiint_{\Sigma_\epsilon} \left[u \Delta \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) - \frac{1}{R_{M_0}} \Delta u \right] dV = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) - \frac{1}{R_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + \iint_{\Sigma_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) - \frac{1}{R_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$$

Хотим Σ_ϵ сжаться до M_0

$$1. \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{R_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \{ \text{Т.о. среднем} \} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial n} (M^*) \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} dS$$

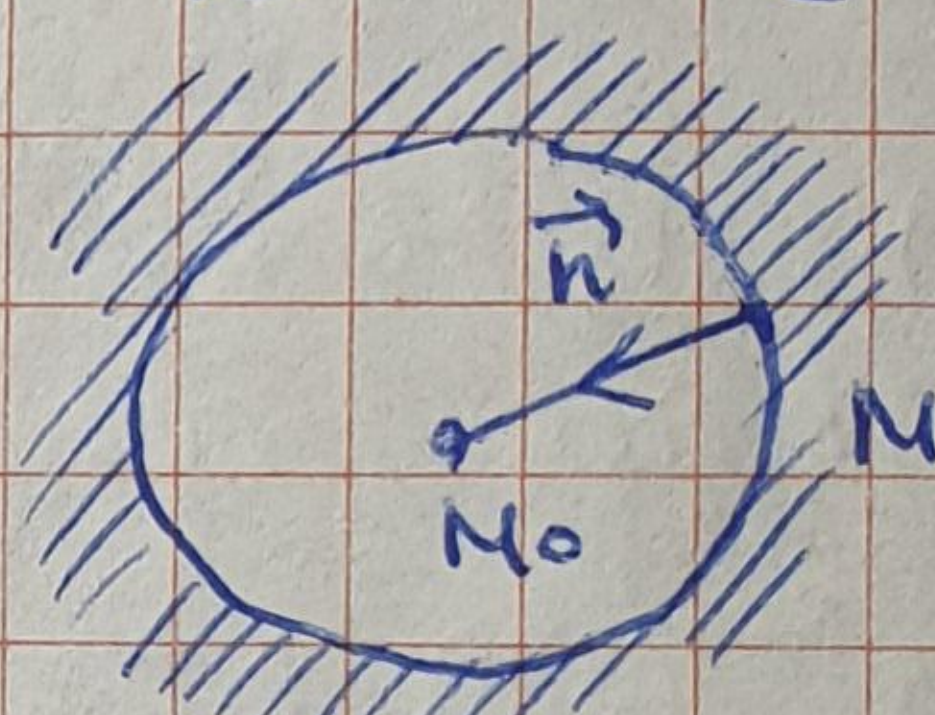
$\Sigma_\epsilon // R_{M_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

$\epsilon^2 \cdot 4\pi \epsilon^2$

$$2. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) = \left(\vec{n}, \text{grad} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) \right)$$

$$M M_0 = \{ (x-x_0), (y-y_0), (z-z_0) \}$$

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{(x-x_0)}{R_{M_0}}, -\frac{(y-y_0)}{R_{M_0}}, -\frac{(z-z_0)}{R_{M_0}} \right\} - \text{единичная нормаль к сфере } \Sigma_\epsilon$$



$$\text{grad} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) \right\} = \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R_{M_0}^3} \cdot 2(x-x_0), -\frac{(y-y_0)}{R_{M_0}^3}, -\frac{(z-z_0)}{R_{M_0}^3} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) = \left(\vec{n}, \text{grad} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) \right) = \frac{(x-x_0)^2}{R_{M_0}^4} + \frac{(y-y_0)^2}{R_{M_0}^4} + \frac{(z-z_0)^2}{R_{M_0}^4}$$

$$1. \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) \right] dS = \{ \text{Т.о. среднем} \} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(M_\epsilon^*) \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{4\pi \epsilon^2 / \epsilon^2} dS = u(M_0) \cdot 4\pi$$

представим все в 1

Итог: $4\pi u(M_0) = - \iiint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{R_{M_0}} \Delta u dV - \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) - \frac{1}{R_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \iint_{\Sigma_\epsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) - \frac{1}{R_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$

(основная) ф-ла Грина

Замечание: Если u - гармоническая, то $\Delta u = 0$, т.е.

$$4\pi u(M_0) = - \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0}} \right) - \frac{1}{R_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$$

E²: II Ф-ла Трикоми: $u(x, y); \sigma(x, y)$:

$$\iint_D (u \Delta \sigma - \sigma \Delta u) dS = \iint_\Omega \left(u \frac{\partial \sigma}{\partial n} - \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\ell$$

III Ф-ла Трикоми:

$$2\pi u(M_0) = - \iint_D \ln r_{M_0} \Delta u dS - \int_\Gamma \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{M_0}} \right) - \ln \frac{1}{r_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\ell$$

14. Св-ва гармонических ф-ий
 $E^n, \Omega \subset E^n$ и опр ф-и $u(x_1, \dots, x_n)$

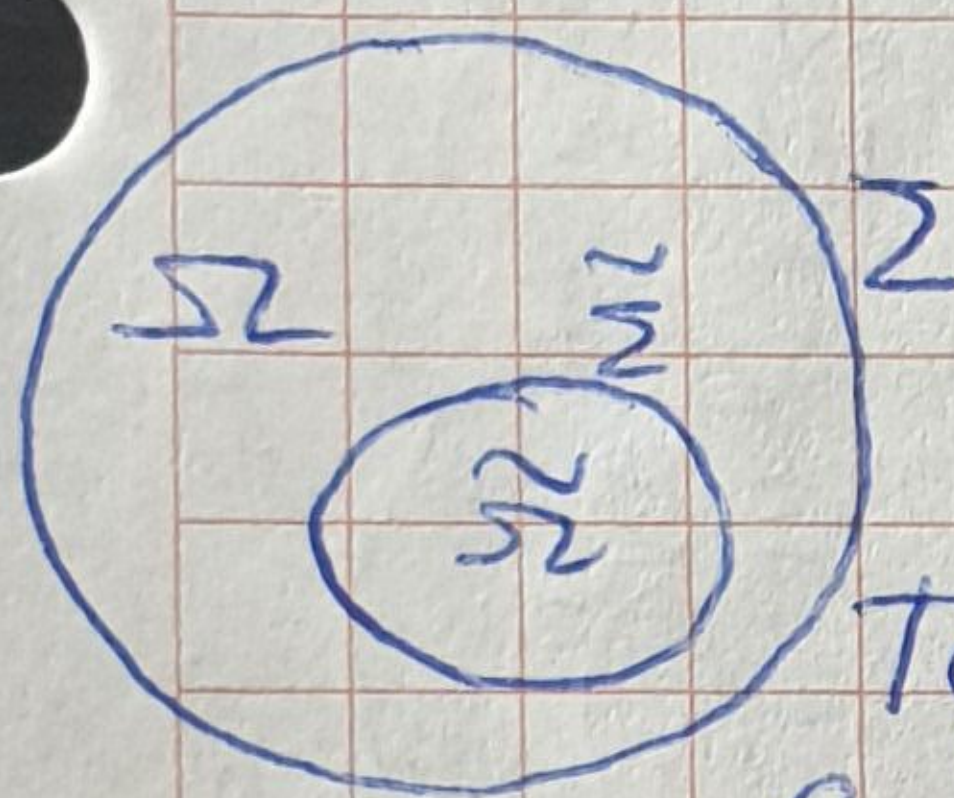
Опр. Ф-я $u(x_1, \dots, x_n)$ называется гармонической в Ω если $u \in C^2(\Omega)$ и удовл. ур-ию Лапласа, т.е.
 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ в Ω

Св-ва гармонических ф-ий:

1. Если u гармоническая в Ω , то $\iint_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$, где $\tilde{\Sigma}$ - произвольная замкнутая поверхность в Ω .

Р-во: II ф-ла Грина:

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} (u \Delta v - v \Delta u) \sqrt{1} = \iint_{\tilde{\Sigma}} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$$



Так как $\Delta v = 1 \Rightarrow 0 = - \iint_{\tilde{\Sigma}} 1 \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$

2. (Т. о среднем значении). Если гармон. в Ω . Тогда $\forall M_0 \in \Omega$ и $\forall$ сфере $\Sigma_{M_0}^a$ радиуса a с центром в M_0 , лежащая в Ω , справедлива формула: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P) d\sigma_P$

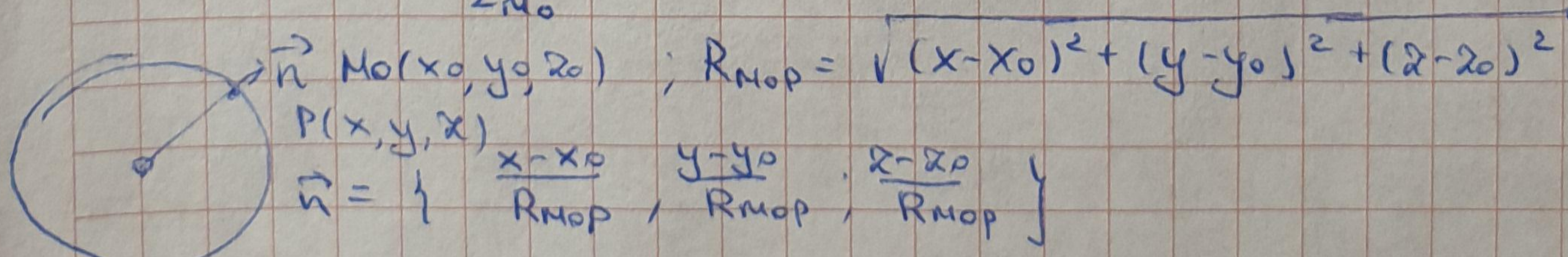
Р-во: u - гармоническая ф-я.

Запишем для нее III ф-лу Грина

$$u(M_0) = - \iint_{\Sigma_{M_0}^a} [u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n}] d\sigma_P$$

• $\iint_{\Sigma_{M_0}^a} \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_P = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_P = 0$ (по св-ву 1)

Итого: $u(M_0) = - \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) d\sigma_P$



$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) = \left(\vec{n}, \text{grad} \frac{1}{R_{M_0 P}} \right) = \frac{-(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{R_{M_0 P}^3} = -\frac{1}{R_{M_0 P}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2(x-x_0)}{R_{M_0 P}^3} = -\frac{(x-x_0)}{R_{M_0 P}^3}$$

Тогда: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P) d\sigma_P$

3. Если u — гармоническая ф-я в Ω , то $u \in C^\infty(\Omega)$

До-во: Запишем ф-лу Грина для $u(x, y, z) = u(M)$

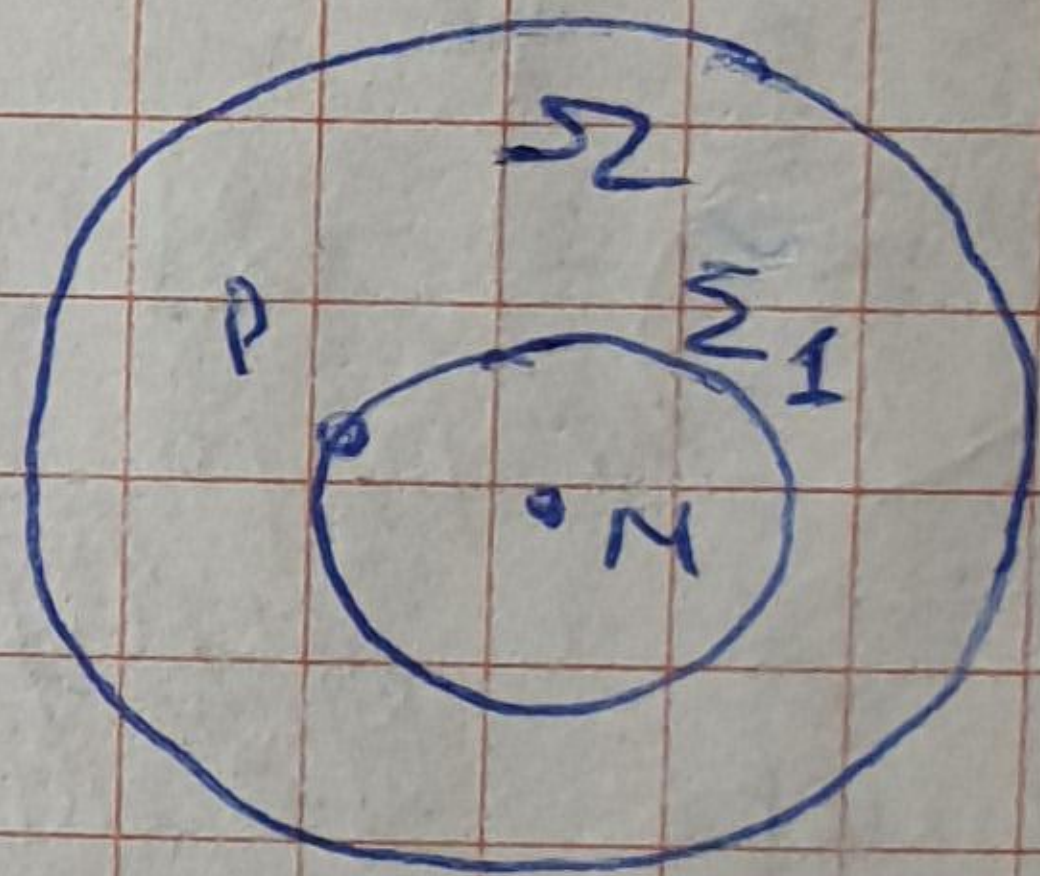
$\forall P \in \Sigma_1$; $P(x_0, y_0, z_0)$

$$4\pi u(M) = - \iint_{\Sigma_1} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) - \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right] d\sigma_P =$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} u(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial n} \Big] d\sigma_P$$

Все $\int$ -лы собственные, поверхностные ф-ии диф-лы
 $\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$ (особенностей никаких нет)



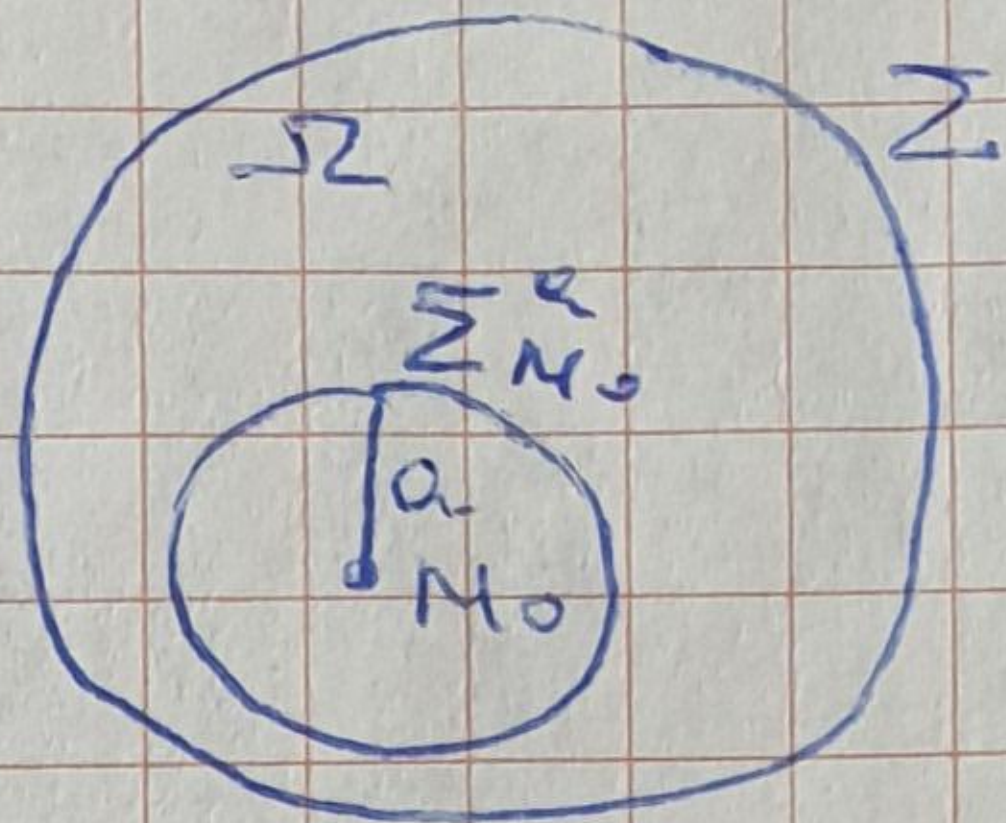
15. Принцип максимума для гармонических ф-ий

1 (Принцип максимума)

Если $u \in C(\bar{\Omega})$ и гармоническая в Ω (т.е. $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω), то

$$\max_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = \max_{M \in \Sigma} u(M)$$

$$\min_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = \min_{M \in \Sigma} u(M)$$



D-во: Это не так, т.е. $\exists \cdot Mo \in \Omega$:

$$u(Mo) = \max_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = U$$

Возьмем окр. Mo : $\Sigma_{Mo}^a \subset \Omega$ и применим Т. о среднем значения (ср-во, дилегр¹⁴)

$$U = u(Mo) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{Mo}^a} u(P) d\sigma_P \leq \frac{U}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_{Mo}^a} d\sigma_P = U$$

$\Rightarrow$ максимум достигается в $\forall$ сфере

Это не так, т.е. $\exists \cdot P^* \in \Sigma_{Mo}^a : u(P^*) < U - \epsilon$

и невр $\Rightarrow u(P) < U - \epsilon/2 \forall P \in \bar{\Sigma}$

но тогда в $\odot$ строгое нер-во

$U < U \Rightarrow$ W // противоречие

$\Rightarrow$ Если внутри обл. достигается максимум, то он достигается и на краях.

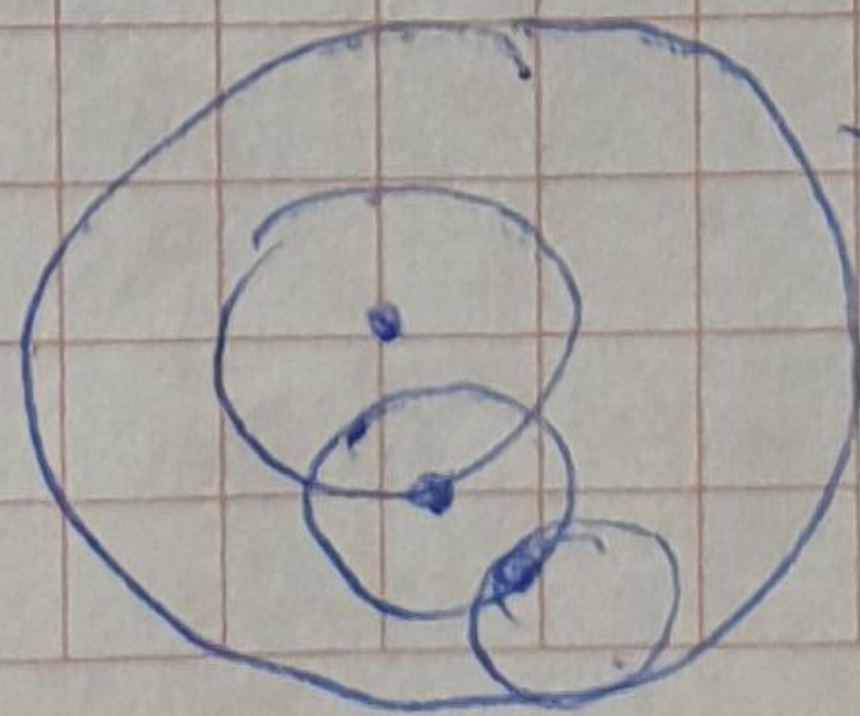
Выберем на сфере $\forall$ $\epsilon > 0$ за новую и т.д. $\Rightarrow$

получим послед-сть $M_n \in \bar{\Omega} \quad n \rightarrow \infty : M_n \rightarrow P \in \bar{\Omega}$

Тогда $u(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(M_n) = U$ (вещу невр) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = \max_{M \in \Sigma} u(M)$$

Если максимум достигается и внутри, то ф-я константа



послед-сть M_n

16 ! и устанавливается решение внутренней задачи Дирихле для ур-ня Лапласа

Опр. Ф-я $u(x, y, z)$ - решение внутренней задачи Дирихле, если

- 1) $u \in C(\bar{\Omega})$
- 2) u гармоническая в Ω ($\Delta u = 0$ в Ω ; $u \in C^2(\Omega)$)
- 3) $u(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \Sigma$

Т.

$\exists u_i(x, y, z) \quad i=1, 2:$

- 1) $u_i \in C(\bar{\Omega})$
- 2) $\Delta u_i = 0$ в Ω ; $u_i \in C^2(\Omega)$
- 3) $u_i(x, y, z) = \varphi_i(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \Sigma$

Тогда $u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \bar{\Omega}$
 Д-во: $\Delta v(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

- 1) $v \in C(\bar{\Omega})$
- 2) $\Delta v = 0$ в Ω ; $v \in C^2(\Omega)$
- 3) $v(x, y, z) = 0$ на Σ

Из 2) $\Rightarrow v(x, y, z)$ - гармоническая

Гармоническая + 1 условие $\Rightarrow$ применим Принцип макс:

$$\begin{aligned} \max_{M \in \bar{\Omega}} v(M) &= \max_{M \in \Sigma} v(M) = 0 \quad \text{т.к. 3 условие} \\ \min_{M \in \bar{\Omega}} v(M) &= \min_{M \in \Sigma} v(M) = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\Rightarrow v(x, y, z) = 0 \text{ в } \bar{\Omega} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z) \end{aligned} \right.$$

Устанавливается:

Лемма: $\exists u_i(x, y, z) \quad i=1, 2:$

- 1) $u_i \in C(\bar{\Omega})$
- 2) $\Delta u_i = 0$ в Ω ; $u_i \in C^2(\Omega)$
- 3) $u_1(x, y, z) \geq u_2(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \Sigma$

$\Rightarrow u_1(x, y, z) \geq u_2(x, y, z)$ в $\bar{\Omega}$

Д-во:

$v(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) \geq 0$ в Σ по усл.

1) $v \in C(\bar{\Omega})$
 2) $\Delta v = 0$ в Ω , $v \in C^2(\Omega)$ } Принцип макс $\Rightarrow \min_{M \in \bar{\Omega}} v(M) = \min_{M \in \Sigma} v(M) \geq 0$

$\Rightarrow v(M) \geq 0$ в $\bar{\Omega} \Rightarrow u_1(x, y, z) \geq u_2(x, y, z)$ в $\bar{\Omega}$

информат

Т (Устойчивость): $\exists u_i(x, y, z) \quad i=1, 2$:

- 1) $u_i \in C(\bar{\Omega})$
- 2) $u_i \in C^2(\Omega)$; $\Delta u_i = 0$ в Ω
- 3) $u_i(x, y, z) = \varphi_i(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Sigma$

Тогда:

$$\max_{(x, y, z) \in \bar{\Omega}} |u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)| = \max_{(x, y, z) \in \Sigma} |\varphi_1(x, y, z) - \varphi_2(x, y, z)|$$

До-во:

$$\exists U^+(x, y, z) = M; \quad U^-(x, y, z) = -M$$

$$\exists u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$$

$$u(x, y, z) \text{ и } U^\pm(x, y, z):$$

$$1. \quad u, U^\pm \in C(\bar{\Omega})$$

$$2. \quad u, U^\pm \in C^2(\Omega) \text{ и } \Delta u = 0, \Delta U^\pm = 0 \text{ в } \Omega$$

$$\textcircled{*} \Delta u(x, y, z) \text{ и } U^+(x, y, z):$$

$$u(x, y, z) \leq U^+(x, y, z) \text{ на } \Sigma \xRightarrow{\text{по лемме}} u(x, y, z) \leq U^+(x, y, z) \text{ на } \bar{\Omega}$$

$$\textcircled{*} \Delta u(x, y, z) \text{ и } U^-(x, y, z):$$

$$u(x, y, z) \geq U^-(x, y, z) \text{ на } \Sigma \xRightarrow{\text{по лемме}} u(x, y, z) \geq U^-(x, y, z) \text{ в } \bar{\Omega}$$

$$\Rightarrow U^- \leq u(x, y, z) \leq U^+ \Rightarrow |u(x, y, z)| =$$

$$\Rightarrow |u(x, y, z)| = |u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)| \leq \max_{(x, y, z) \in \Sigma} |\varphi_1(x, y, z) - \varphi_2(x, y, z)|$$



17. ! решения внутренних граничных
 Неймана для ур-на Лапласа и необход.
 условия "ее" разрешимости.

Опр. Ф-я $u(x, y, z)$ называется решением
внутренней граничной задачи Неймана, если:

1. $u(x, y, z) \in C^1(\bar{\Omega})$
2. u гармоническая в Ω (т.е. $\Delta u = 0$ в Ω , $u \in C^2(\Omega)$)
3. $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z)$ на Σ

Т! $\exists u_i(x, y, z) \quad i = \overline{1, 2}$:

1. $u_i \in C^1(\bar{\Omega})$
2. $u_i \in C^2(\Omega)$; $\Delta u_i = 0$ в Ω
3. $\frac{\partial u_i}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Sigma$

Тогда $u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) = \text{const}$
Д-во:

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$$

$u(x, y, z)$:

1. $u \in C^1(\bar{\Omega})$
2. $u \in C^2(\Omega)$; $\Delta u = 0$ в Ω
3. $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = 0 \quad (x, y, z) \in \Sigma$

Запишем ИФ-ну Грина:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v \, d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma - \iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } v) \, d\tau$$

Возьмем $u = v = u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

$$\iiint_{\Omega} u \Delta u \, d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } u) \, d\tau$$

$$\iiint_{\Omega} (\text{grad } u, \text{grad } u) \, d\tau = 0 \Rightarrow \iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = \text{const}$$

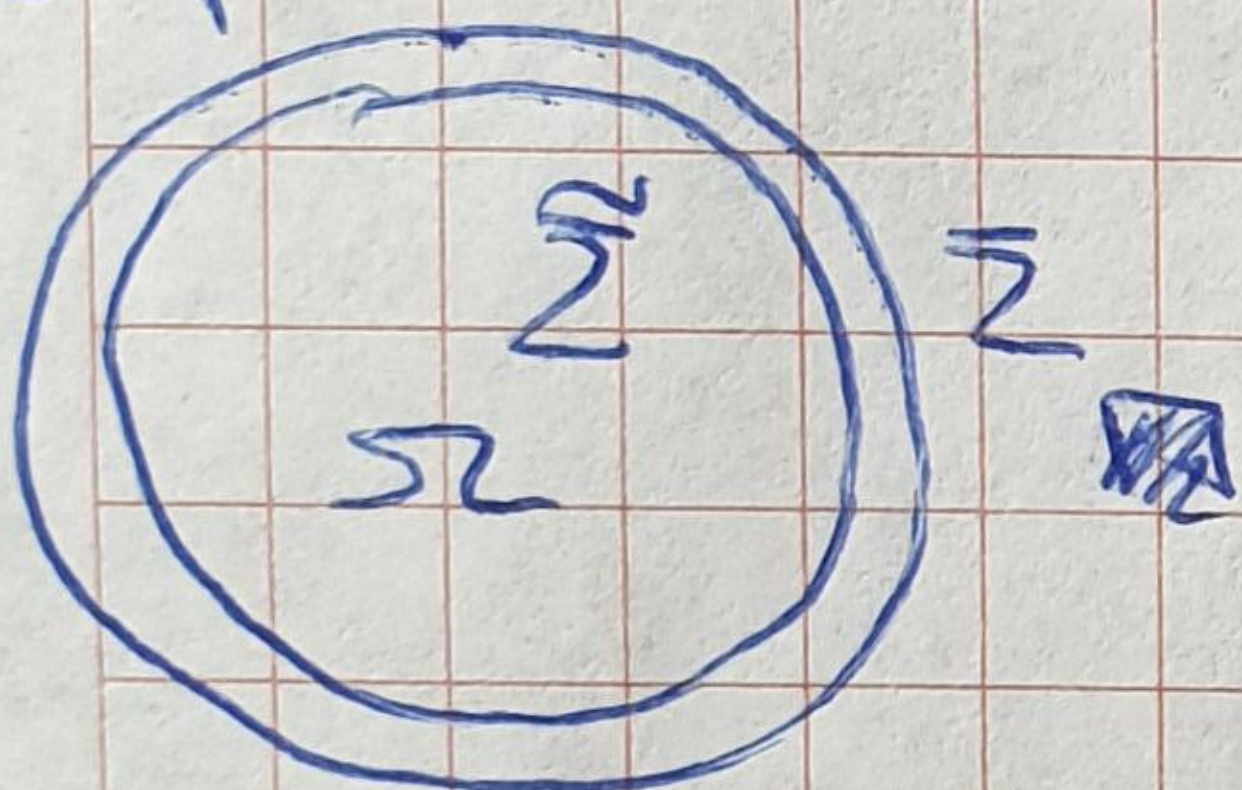
Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана

- Если $u(x, y, z) \in C^1(\Omega)$, $\Delta u = 0$ в Ω ; $u \in C^2(\Omega)$
 $\frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x, y, z)$ на Σ (т.е. u — реш. внутр. задачи Неймана)

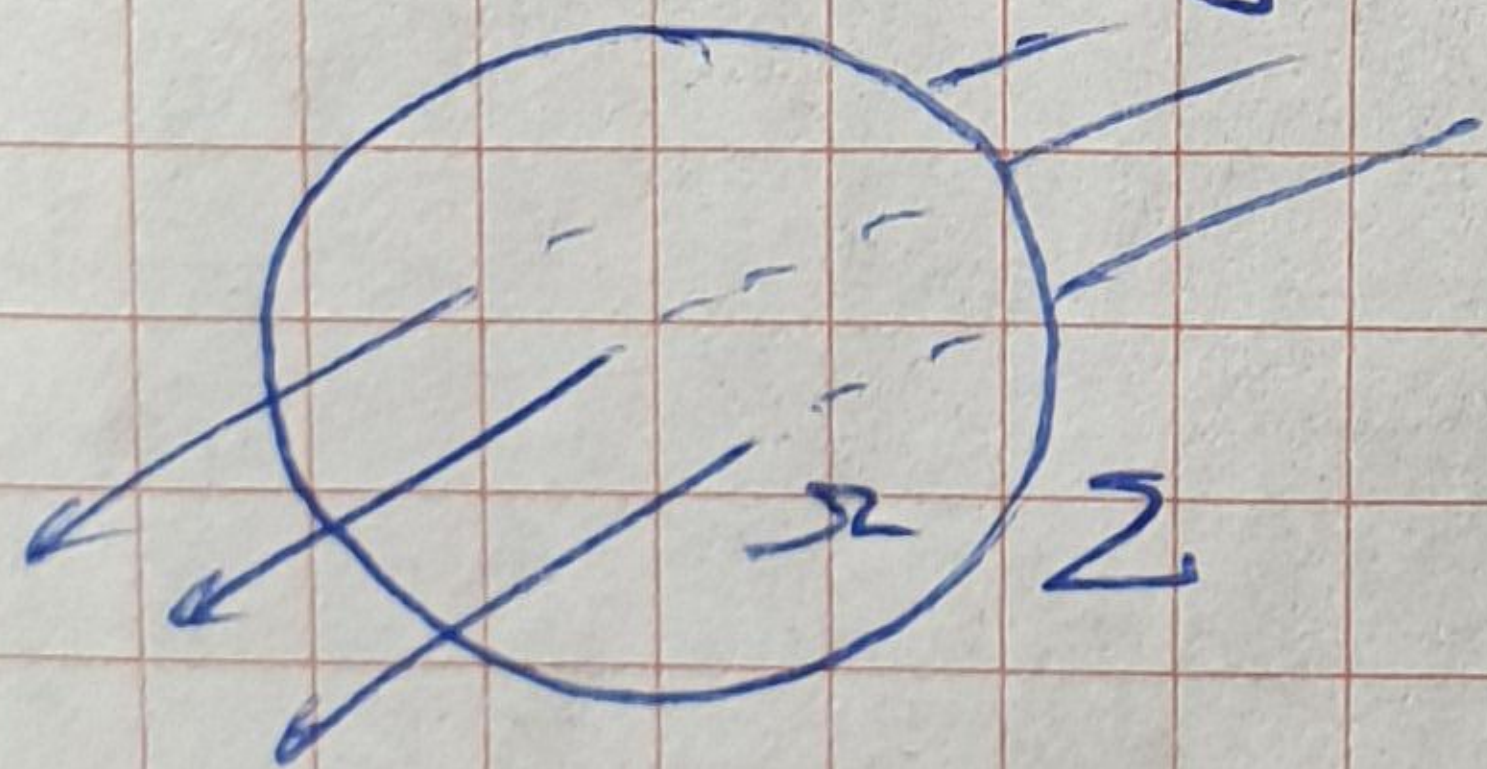
то $\iint_{\Sigma} \psi(x, y, z) d\sigma = 0$

D-во: u — гармоническая в $\Omega \Rightarrow \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$
 $\Sigma \subset \Omega$ (св-во 1. билет 14)

Углубим $\tilde{\Sigma} \ll \Sigma$: $\iint_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \rightarrow \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \psi d\sigma \rightarrow 0$



Физический смысл: $\iint_{\Sigma} \psi d\sigma = 0 \Rightarrow$ «сколово втекло, столько и вытекло»
 u — потенциал



18. ! решение задачи Дирихле для ур-ий Лапласа в E^2 и E^3 .

E^3 :

Фр φ -и $u(x, y, z)$ называется решением задачи Дирихле, если

1. $u \in C(E^3 \setminus \Sigma)$
2. u гармоническая в $E^3 \setminus \Sigma$ ($\Delta u = 0$ в $E^3 \setminus \Sigma$, $u \in C^2(E^3 \setminus \Sigma)$)
3. $u(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \Sigma$
4. $|u(x, y, z)| \rightarrow 0$ при $(x, y, z) \rightarrow \infty$, $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$

Т!

$\exists u_i(x, y, z) \ i=1, 2$:

1. $u_i \in C(E^3 \setminus \Sigma)$
2. $\Delta u_i = 0$ в $E^3 \setminus \Sigma$; $u_i \in C^2(E^3 \setminus \Sigma)$
3. $u_i = \varphi(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \Sigma$
4. $|u_i(x, y, z)| \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$

Тогда $u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$

Д-во: $\exists v(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$

$v(x, y, z)$:

1. $v \in C(E^3 \setminus \Sigma)$
2. $v \in C^2(E^3 \setminus \Sigma)$; $\Delta v = 0$ в $E^3 \setminus \Sigma$
3. $v(x, y, z) = 0$ $(x, y, z) \in \Sigma$
4. $|v(x, y, z)| \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$

Р-ем, что $v(x, y, z) \equiv 0$

$\exists$ это не так, т.е. $\exists M_0(x_0, y_0, z_0) \in E^3 \setminus \Sigma$:

$$v(x_0, y_0, z_0) = A > 0$$

Из опр. равн. с-сов $\Rightarrow \exists$ сфера Σ_R (радиус R), кот содержит обл Σ и M_0 : $|v(x, y, z)| \leq A/2$ $(x, y, z) \in \Sigma_R$

$$\Rightarrow \max_{\Sigma_R} v(x, y, z) \leq A/2$$

$$\min_{\Sigma_R} v(x, y, z) \geq -A/2$$

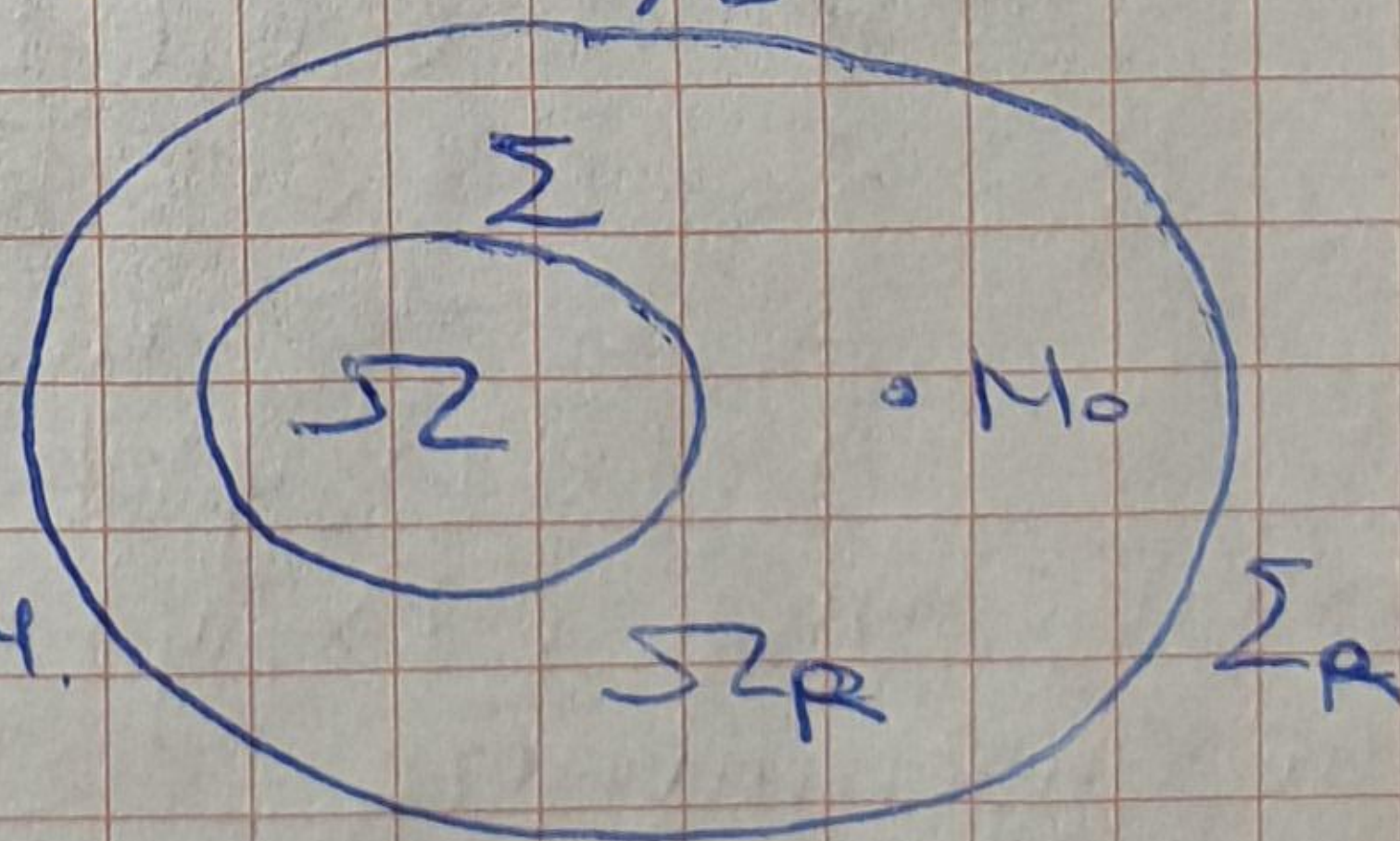
Применим к v Принцип макс. знач.

$$\max_{\Sigma_R} v = \max_{\Sigma \cup \Sigma_R} v \leq A/2$$

$$\min_{\Sigma_R} v = \min_{\Sigma \cup \Sigma_R} v \geq -A/2$$

но мы предположили, что $v(x_0, y_0, z_0) = A \Rightarrow W \Rightarrow$

$$v(x, y, z) = 0 \text{ в } E^3 \setminus \Sigma$$



Пример важности усл-ий (4):

$$\begin{aligned} \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 &< a^2 \\ \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \end{aligned}$$

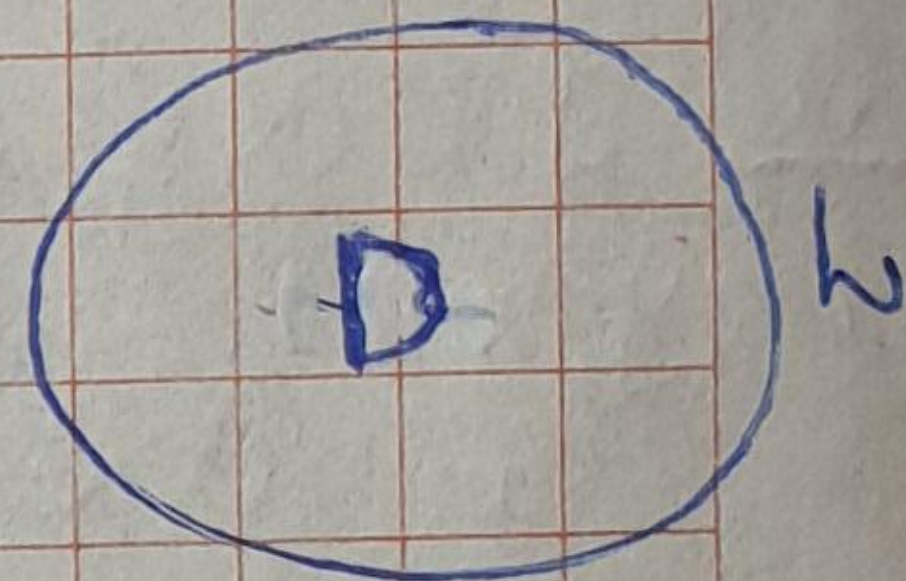
А такую постановку задачи Дирихле:

1. $u \in C(E^3 \setminus \Sigma)$
2. $\Delta u = 0$ в $E^3 \setminus \Sigma$
3. $u(x, y, z) = C = \text{const} \quad (x, y, z) \in \Sigma$

$u_1(x, y, z) = C$
 $u_2(x, y, z) = Ca / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ решение граничной задачи, но $u_1 \neq u_2$, т.е. нарушено!

E^2 : Фр - ф-я $u(x, y)$ называется решением внешней задачи Дирихле в E^2 :

- 1) $u \in C(E^2 \setminus D)$
- 2) u гармоническая в $E^2 \setminus D$ ($\Delta u = 0$ в $E^2 \setminus D$) и $u \in C^2(E^2 \setminus \bar{D})$
3. $u(x, y) = \varphi(x, y) \quad (x, y) \in L$
4. $|u(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in E^2 \setminus D$



Т!:

1. $u_i(x, y) \quad i=1, 2$:
1. $u_i \in C(E^2 \setminus D)$
2. $\Delta u_i = 0$ в $E^2 \setminus D$ и $u_i \in C^2(E^2 \setminus \bar{D})$
3. $u_i(x, y) = \varphi(x, y) \quad (x, y) \in L$
4. $|u_i(x, y)| \leq M_i \quad (x, y) \in E^2 \setminus D$

Тогда $u_1(x, y) = u_2(x, y)$

D-во:

$$\Sigma \quad \sigma(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

$\sigma(x, y)$:

1. $\sigma \in C(E^2 \setminus D)$
2. $\Delta \sigma = 0$ в $E^2 \setminus D$; $\sigma \in C^2(E^2 \setminus \bar{D})$
3. $\sigma = 0$ на L
4. $|\sigma(x, y)| \leq M_1 + M_2 = M$ при $(x, y) \in E^2 \setminus D$

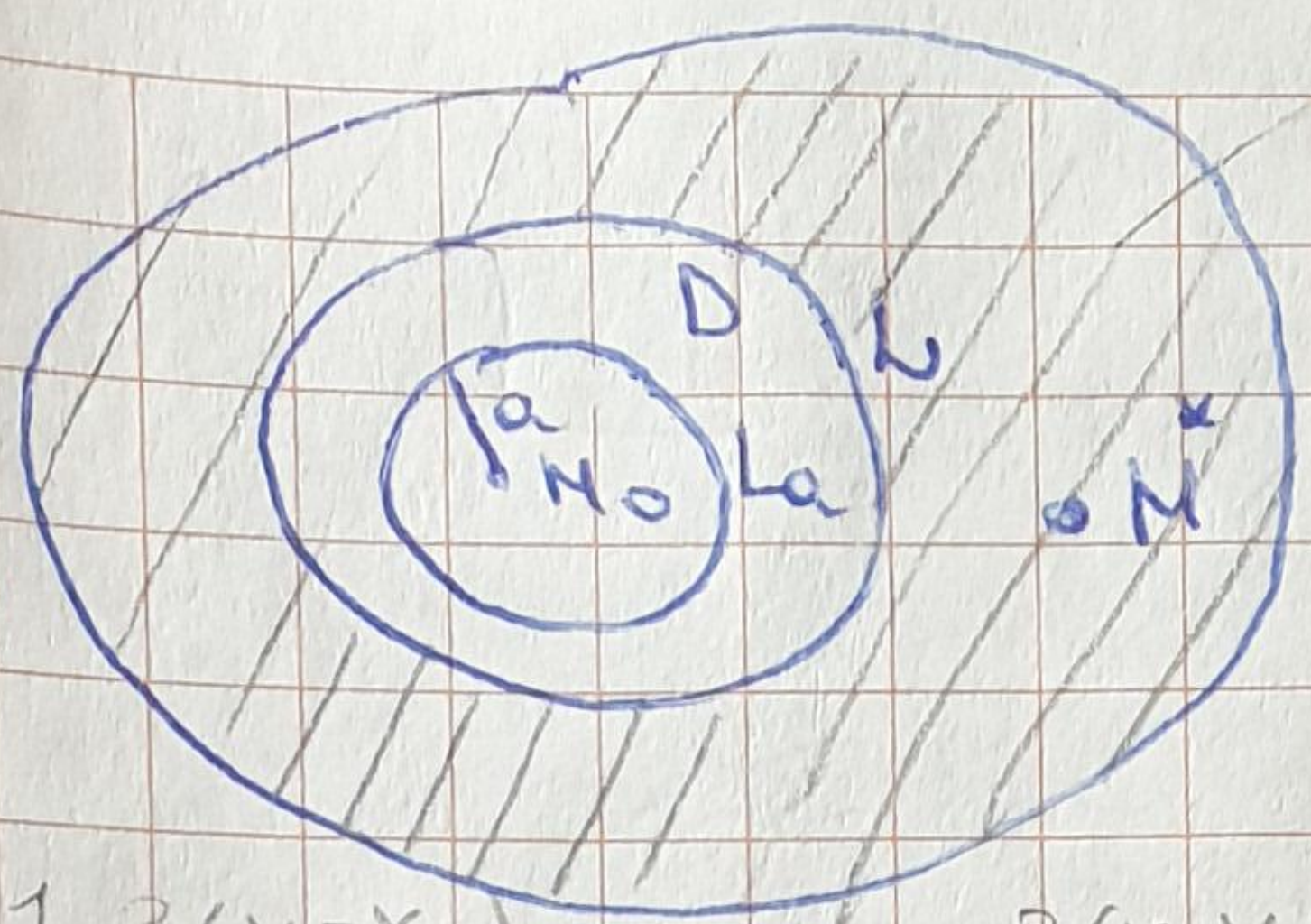
D-ем, что $\sigma(x, y) = 0$

От противного:

$$\exists \exists M^*(x^*, y^*) : \sigma(x^*, y^*) = A > 0 \quad \text{на } \bar{D}$$

$(x^*, y^*) \in E^2 \setminus \bar{D}$

Тогда Возьмём a : h_a - окр. с центром в $o = M^*(x_0, y_0) \in D$
 R : $h_a R$ -окр, еор $D \cap M^*$



Возьмем $\pm u_0$:

$$w_R(x, y) = M \cdot \frac{\ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{R}{a}}$$

$w_R(x, y)$:

$$\Delta w = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^3} \left(2r \frac{\partial w}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$\Delta w = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} = 0$$

1. $w_R(x, y) \in C(E^2 \setminus D)$

2. $\Delta w_R(x, y) = 0$ в $E^2 \setminus D$

3. $w_R(x, y) \geq 0$ на L

4. $w_R(x, y) = M$ на L_R

$$\Rightarrow \begin{cases} |\sigma(x, y)| \leq w_R(x, y) \text{ на } L \\ |\sigma(x, y)| \leq \{ \text{по усу } y \in M = w_R(x, y) \text{ на } L_R \end{cases}$$

Применим принцип макс. знач.:

$$|\sigma(x, y)| \leq w_R(x, y) \text{ в обл } D \cup L_R$$

$$|\sigma(x^*, y^*)| \leq w_R(x^*, y^*) = M$$

$R \rightarrow \infty$: $|\sigma(x^*, y^*)| \leq w_\infty(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow w \equiv 0$
 т.к. предположили, что $\sigma(x^*, y^*) = A \neq 0 \Rightarrow \sigma(x, y) = 0$

Пример: откажемся от [4]: $D = x^2 + y^2 < b^2$
 $L: x^2 + y^2 = b^2$

внешн. задачу Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } E^2 \setminus D \\ u(x, y) = C = \text{const на } L \end{cases}$

Реш: 1. $u_1(x, y) = C$ уса 4+
 2. $u_2(x, y) = C + \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b}$ уса 4- $\Rightarrow$ нарушается! реш.

19. св-ва ф-ии Грина для реш задачи Дирихле

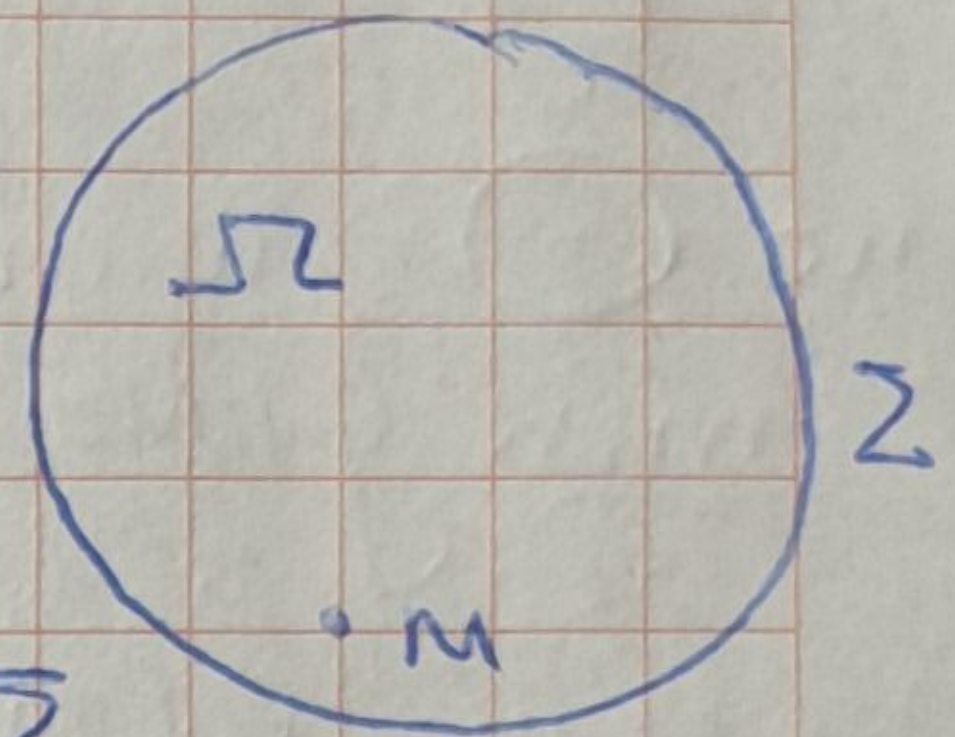
Опр. ф-ия $G(M, P)$ - ф-ия Грина для внутренней задачи Дирихле в Σ , если
 1) $\forall \text{ фикс. } M \in \Sigma \quad G(M, P)$ - некоторая ф-ия, от (ξ, η, ζ) ур-ия $\Delta_{\Sigma \cap S} G(M, P) = 0 \quad \forall P \neq M, \quad \forall P \in \Sigma$

2. Для $G(M, P)$ справедливо представление ($\forall M \in \Sigma$)
 $G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + \sigma^{(M, P)}$, где σ - гармоническая ф-ия в Σ

3. $G(M, P) = 0 \quad \forall P \in \Sigma$

т.е. $G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + \sigma(M, P)$ из тождества $\forall P \in \Sigma$

$$\sigma(M, P) = -\frac{1}{4\pi R_{MP}}$$



$M(x, y, z)$
 $P(\xi, \eta, \zeta)$

Запишем III ф-лу Грина для гармонической ф-ии u :

$$4\pi u(M) = - \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MMP_0}} \right) - \frac{1}{R_{MMP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma \quad P \in \Sigma; M \in \Sigma$$

Запишем теперь II ф-лу Грина: (σ - гармоническая ф-ия)

$$0 = \iiint_{\Sigma} u \Delta \sigma - \sigma \Delta u \, d\tau = \iint_{\Sigma} \left(u(P) \frac{\partial \sigma(P)}{\partial n} - \sigma(P) \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right) d\sigma_P$$

$$\text{[A] - [B]:} \quad u(M) = - \iint_{\Sigma} u(P) \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MMP_0}} \right) + \frac{\partial \sigma(P)}{\partial n} \right) - \frac{\partial u(P)}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi R_{MMP_0}} + \sigma(P) \right)$$

$$\int G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + \sigma(P)$$

$$\text{тогда: } u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P) \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} d\sigma_P$$

1. Если $G(M, P) = 0$ на Σ , то $u(M) = - \iint_{\Sigma} u(P) \frac{\partial G}{\partial n}(M, P) d\sigma_P$
 когда реш. задачи Дирихле

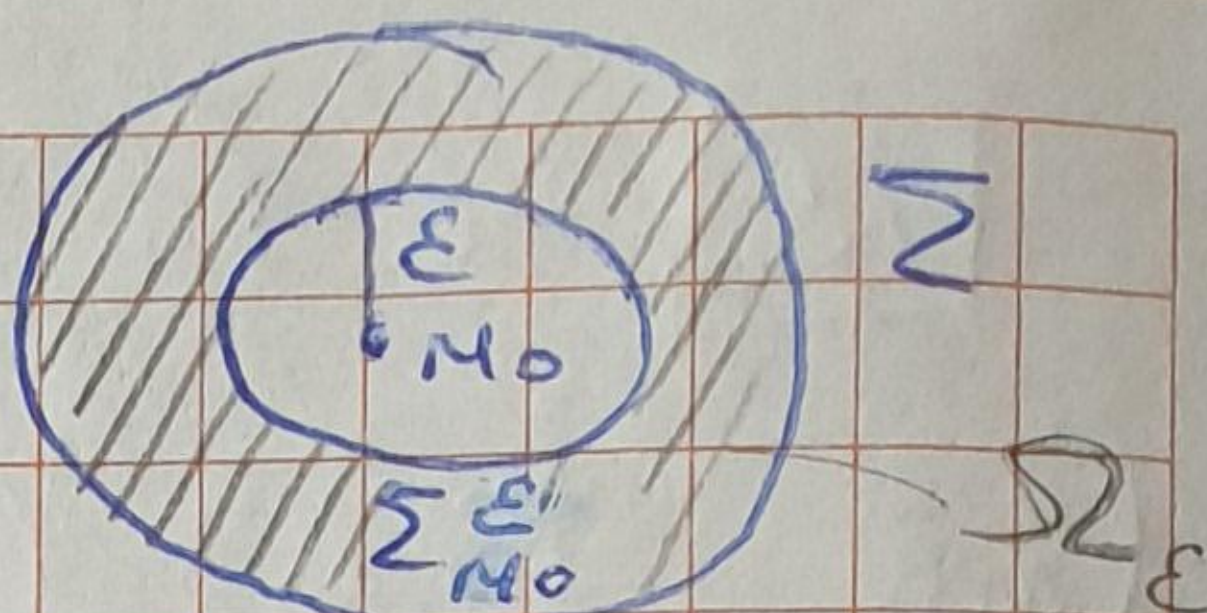
2. Если $G: \frac{\partial G}{\partial n} = 0$ на Σ , то $u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P) \frac{\partial u}{\partial n}(P) d\sigma_P$
 формула реш. внут. задачи Неймана

св-ва ф-ии Грина:

1. $g(M, P) > 0$ при $M, P \in \Sigma, M \neq P$

Д-во: $\exists M_0$ - фикс. Σ

П-ем, что $g(M_0, P) > 0 \forall P \in \Sigma; P \neq M_0$
сфера $\Sigma_{M_0}^\epsilon$ с Σ в центре в M_0 и радиусом ϵ



$\Sigma \circ g(M_0, P)$ гармоническая в Σ_ϵ (1 св-во опр ф-ии Грина)

$\Rightarrow g(M_0, P) = 0$ на Σ (3 св-во)

$g(M_0, P) > 0$ на $\Sigma_{M_0}^\epsilon$ при достаточно малом ϵ

$$g(M_0, P) = \frac{1}{4\pi R_{M_0 P}} + \epsilon \text{ и при } \epsilon \rightarrow 0 \quad \frac{1}{4\pi R_{M_0 P}} \rightarrow \infty, \text{ а гармонич. } \Rightarrow \text{огр. т.е. } g_\Sigma > 0$$

но $\circ \Rightarrow$ применим принцип максимум:

$$\min_{\Sigma_\epsilon} g(M_0, P) = \min_{\Sigma \cup \Sigma_{M_0}^\epsilon} g(M_0, P) = 0 \Rightarrow g(M_0, P) \geq 0 \forall P \in \Sigma_\epsilon$$

но если $g(M_0, P) = 0$ в Σ , то

т.е. минимум достигается внутри области Σ_ϵ

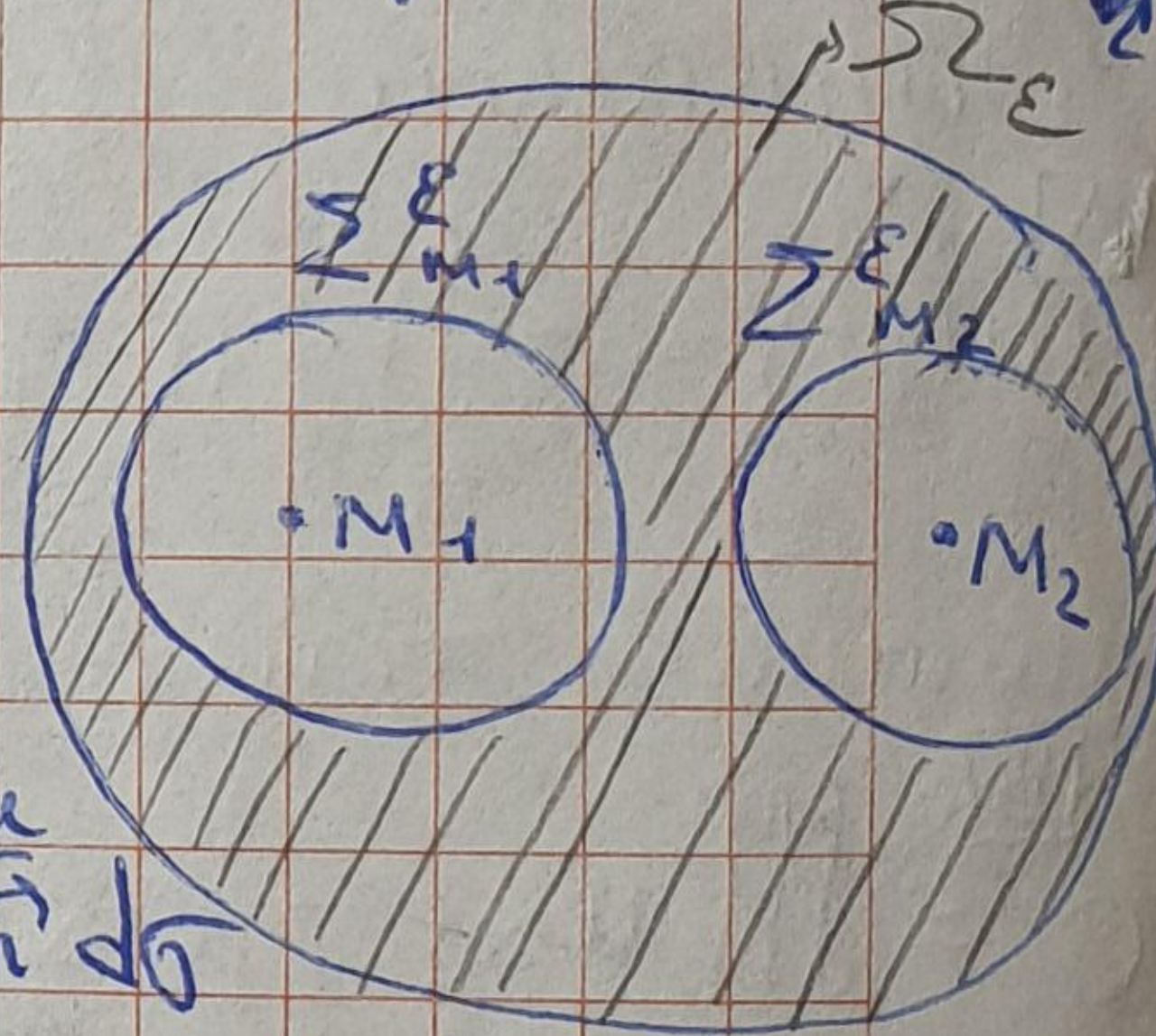
и наша ф-я не константа $\Rightarrow$ противоречие (W)

св-во 2: $g(M, P) = g(P, M) \forall M, P \in \Sigma$

Д-во:

Зафикс. $M_1, M_2 \in \Sigma$:

П-ем, что $g(M_1, M_2) = g(M_2, M_1)$



Ф-я Грина: $\iint_\Sigma u \Delta v - v \Delta u \, d\tau = \iint_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$

$\Sigma = \Sigma_\epsilon; u = g(M_1, P); v = g(M_2, P)$

$\iint_{\Sigma_\epsilon} [g(M_1, P) \Delta g(M_2, P) - g(M_2, P) \Delta g(M_1, P)] \, d\tau =$

$= \iint_\Sigma \left[g(M_1, P) \frac{\partial g(M_2, P)}{\partial n} - g(M_2, P) \frac{\partial g(M_1, P)}{\partial n} \right] \, d\sigma_P +$

$+ \iint_{\Sigma_{M_1}^\epsilon} [A] \, d\sigma_P + \iint_{\Sigma_{M_2}^\epsilon} [A] \, d\sigma_P = I_1 + I_2 = 0$

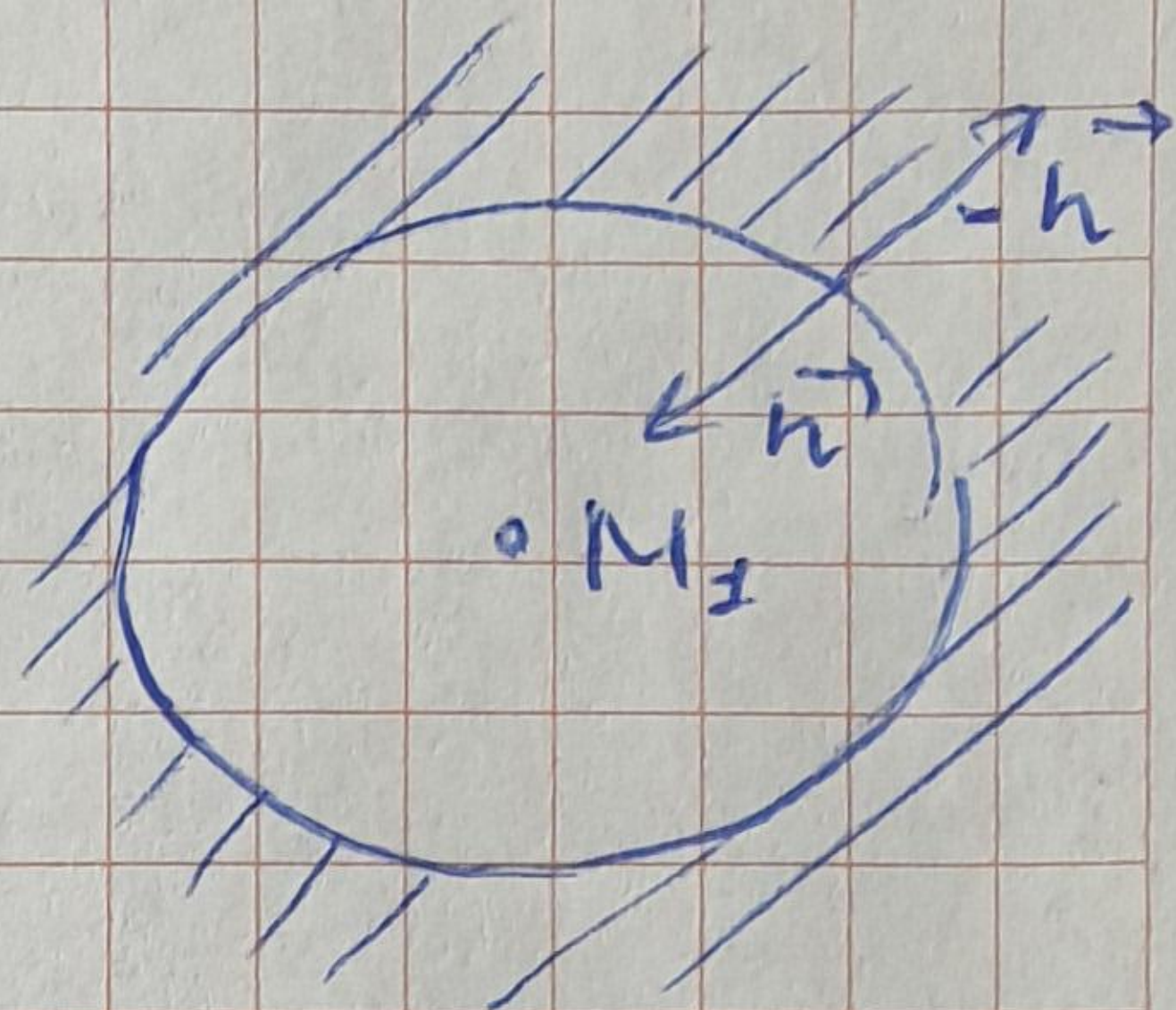
в I_1 : $\iint_{\Sigma_{M_1}^\epsilon} g(M_2, P) \frac{\partial g(M_1, P)}{\partial n} \, d\sigma_P \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$, т.к. $\frac{\partial g(M_2, P)}{\partial n}$ непр. $\Rightarrow$ $g(M_1, P)$ - гармоническая $\Rightarrow$ огр

в I_2 аналогично:

$\Rightarrow \iint_{\Sigma_{M_2}^\epsilon} g(M_1, P) \frac{\partial g(M_2, P)}{\partial n} \, d\sigma_P \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$

$$\bullet \iint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} \left[-g(M_2, P) \frac{\partial g(M_1, P)}{\partial n} \right] d\sigma_P = - \iint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} g(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right) d\sigma_P$$

$$\bullet \iint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} \underbrace{g(M_2, P)}_{\text{отр}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n}}_{\text{отр}} d\sigma_P \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$



$$\bullet \iint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} -g(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right) d\sigma_P$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right) = \left(\vec{n}, \text{grad} \left(\frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right) \right)$$

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{(x-x_1)}{R_{M_1 P}}, -\frac{(y-y_1)}{R_{M_1 P}}, -\frac{(z-z_1)}{R_{M_1 P}} \right\}$$

и у же от
не отсчит.
считано

$$\bullet \text{grad} \frac{1}{R_{M_1 P}} = \left\{ -\frac{(x-x_1)}{R_{M_1 P}^3}, -\frac{(y-y_1)}{R_{M_1 P}^3}, -\frac{(z-z_1)}{R_{M_1 P}^3} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right) = \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}^2}$$

$$\text{Тогда} \iint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} -g(M_2, P) \cdot \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}^2} d\sigma_P = \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} \iint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} g(M_2, P) d\sigma =$$

$$= \oint_{\Sigma_{M_1}^\varepsilon} \text{на среднем значении } g = \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} g(M_2, P^*) \cdot 4\pi \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -g(M_2, M_1)$$

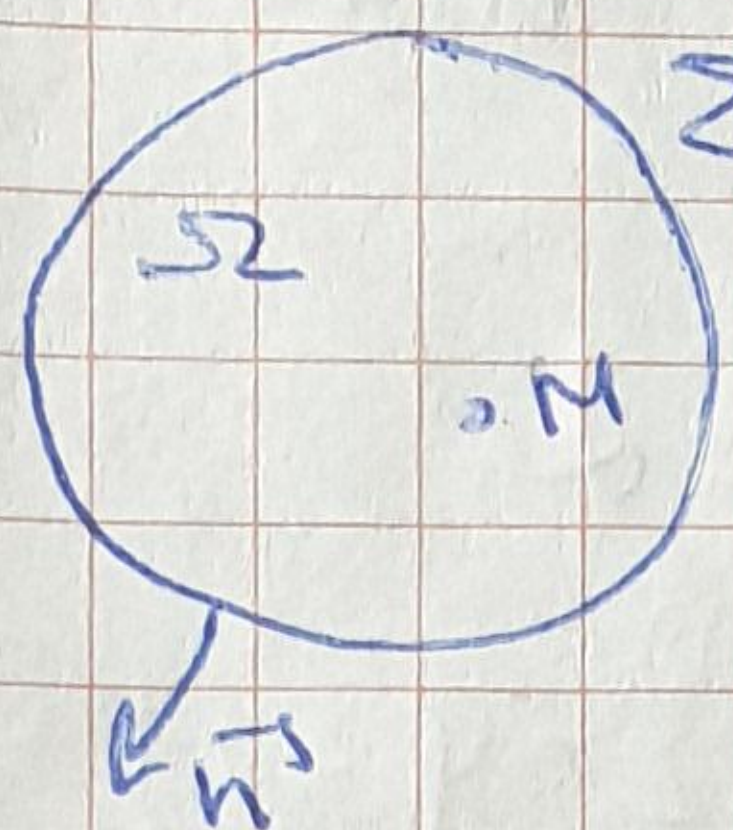
• Аналогично:

$$\bullet \iint_{\Sigma_{M_2}^\varepsilon} +g(M_1, P) \frac{\partial}{\partial n} g(M_2, P) d\sigma_P = g(M_1, M_2)$$

$$\text{Итак: } g(M_1, M_2) - g(M_2, M_1) = 0 \quad \text{ВУУ!!!}$$

20 Потенциалы простого и двойного слоев Потенциалы слоев с единичной плотностью

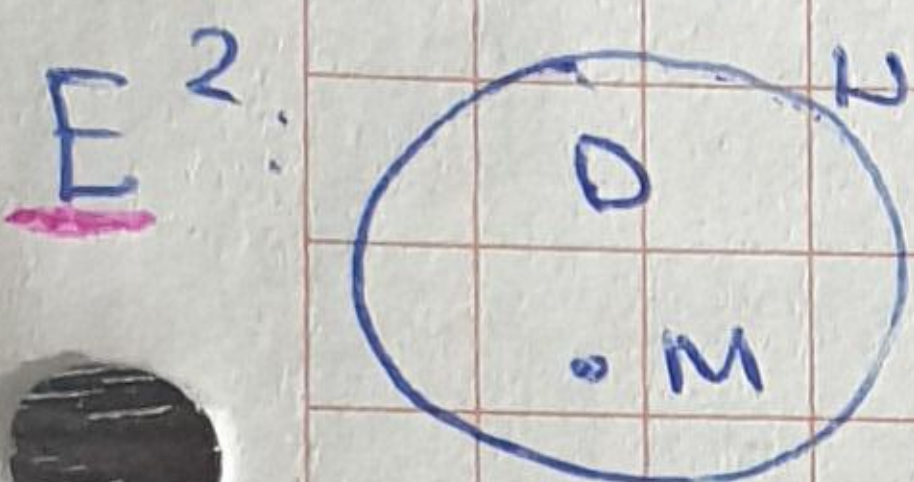
E^3 : Σ "посадим" на Σ какой-то заряд, оно создаст поле. $\vec{n}$ — нормаль внешней



• Потенциал простого слоя: плотность потенциала

$$V(M) = \iint_{\Sigma} g(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P$$

• Потенциал двойного слоя: $U(M) = - \iint_{\Sigma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P$
плотность потенциала



• Потенциал простого слоя:

$$V(M) = \int_{\Gamma} g(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} dl_P$$

• Потенциал двойного слоя: $U(M) = - \int_{\Gamma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) dl_P$

$$\Delta V(M) = \iint_{\Sigma} g(P) \Delta \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P = 0$$

$$\Delta U(M) = \iint_{\Sigma} -f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta \frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = 0$$

$$\text{т.е. } \forall M \notin \Sigma \quad \Delta V = \Delta U = 0$$



• Потенциал на плоскости:

$$U(M) = - \int_{\Gamma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} \right) dl_P = \int_{\Gamma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{MP}) dl_P$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{MP}) = (\vec{n}, \text{grad} \ln r_{MP}) \quad ; \quad r_{MP} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\ln r_{MP}) = \frac{1}{r_{MP}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{r_{MP}} (\xi - x) \cdot 2 = \frac{(\xi - x)}{r_{MP}^2}$$

$$\text{grad}(\ln r_{MP}) = \left\{ \frac{(\xi - x)}{r_{MP}^2}, \frac{(\eta - y)}{r_{MP}^2} \right\} = \vec{MP} = \{\xi - x, \eta - y\} =$$

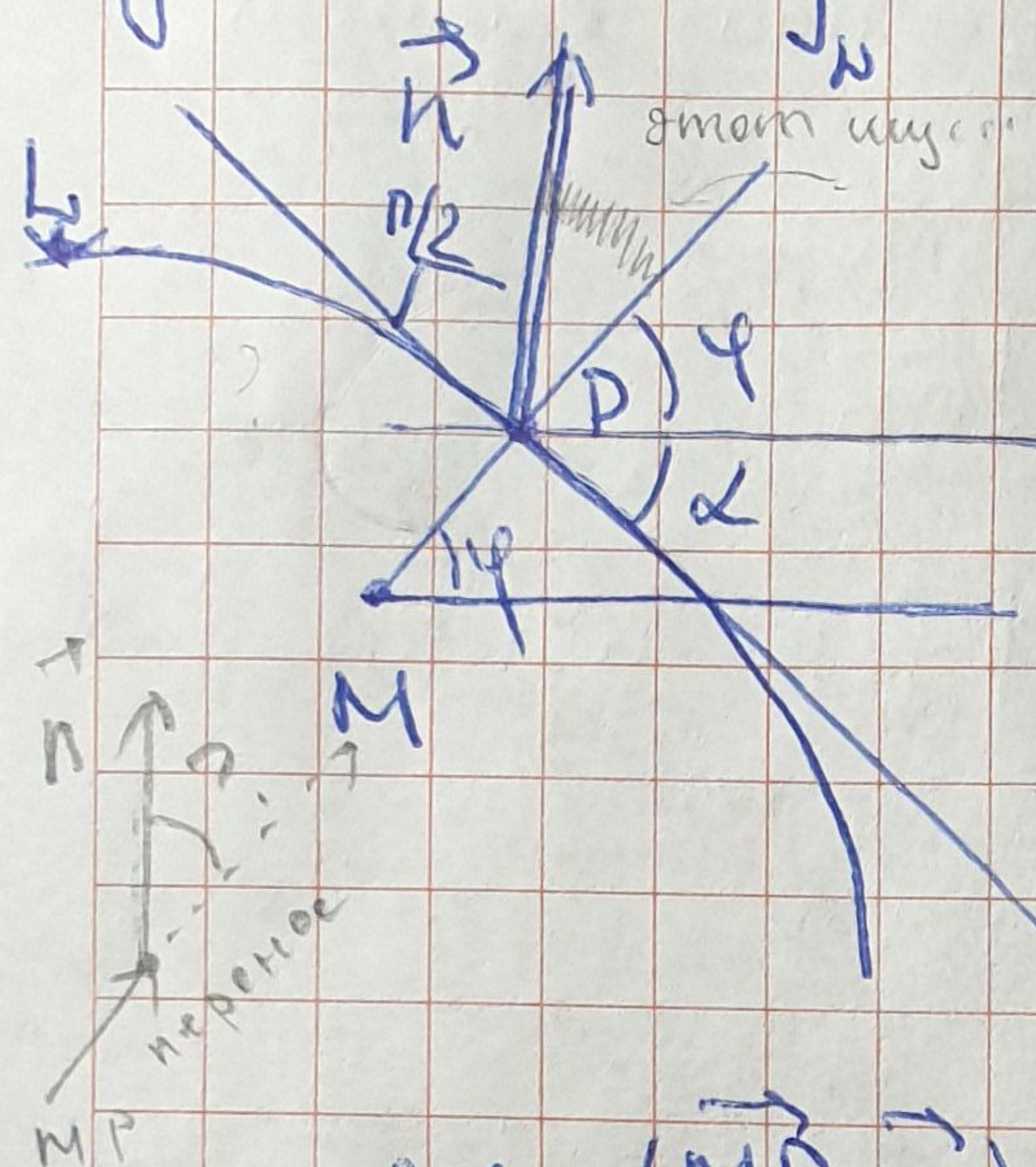
$$= \frac{1}{r_{MP}^2} \vec{MP}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{MP}) = \frac{(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}^2} = \frac{|\vec{MP}| \cdot |\vec{n}| \cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}^2} = \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}}$$

$$U(M) = \int_{\Gamma} f(P) \cdot \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dl_P$$

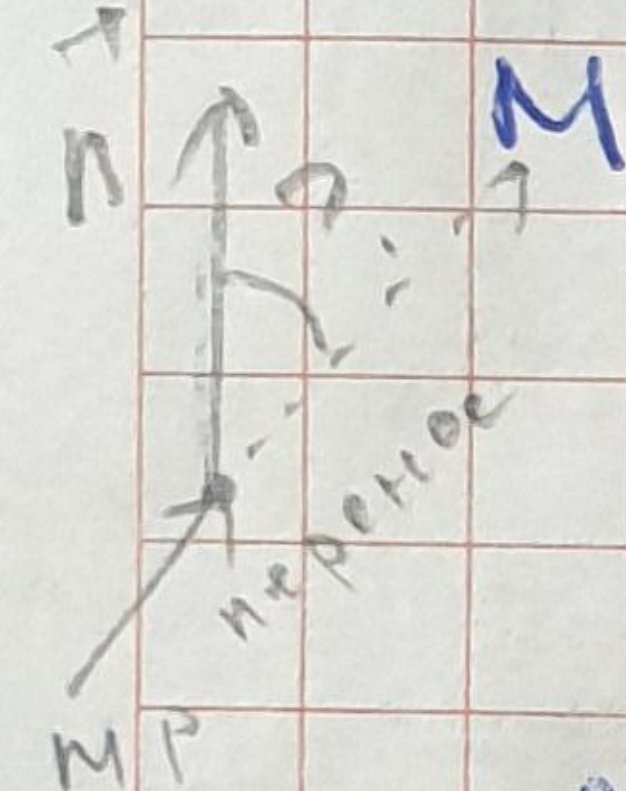
Потенциал α сферически симметрично:
 $\int f(r) = 1$

Тогда $U(M) = \int \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} d\Omega_p$ хотим вычислить этот $\int$.



$$\angle(\vec{MP}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда:} \\ \cos \angle(\vec{MP}, \vec{n}) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha\right) = \\ &= \sin(\varphi + \alpha) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{MP}, \vec{n}) d\Omega_p &= \sin(\varphi + \alpha) d\Omega_p = \\ &= \sin \alpha \cos \varphi d\Omega_p + \sin \varphi \cos \alpha d\Omega_p \end{aligned}$$

Перейдем в полярную СК:

$$\begin{aligned} r(\varphi, \eta) &= r(\varphi) \cos \varphi \\ r &= r(\varphi) \sin \varphi \end{aligned}$$

$$d\varphi = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi$$

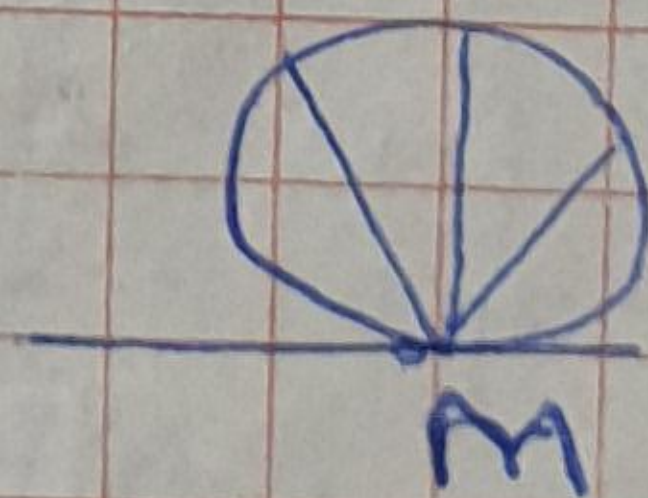
$$d\eta = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \left\{ \begin{aligned} \text{по } \varphi: & d\varphi = \sin \alpha \cos \varphi d\varphi \\ \text{по } \eta: & d\eta = \sin \alpha d\eta \end{aligned} \right\} = \cos \varphi d\eta + \sin \varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2 \varphi r'(\varphi) + r'(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + r'(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r(\varphi) \sin^2 \varphi \\ &= r'(\varphi) \end{aligned}$$

$$U(M) = \int \frac{r(\varphi)}{r(\varphi)} d\varphi = 2\pi$$

$$\text{Тогда } U(M) = \begin{cases} 2\pi & M \in D \\ \pi & M \in L \\ 0 & M \notin D \end{cases}$$



поверхность угадывается π .

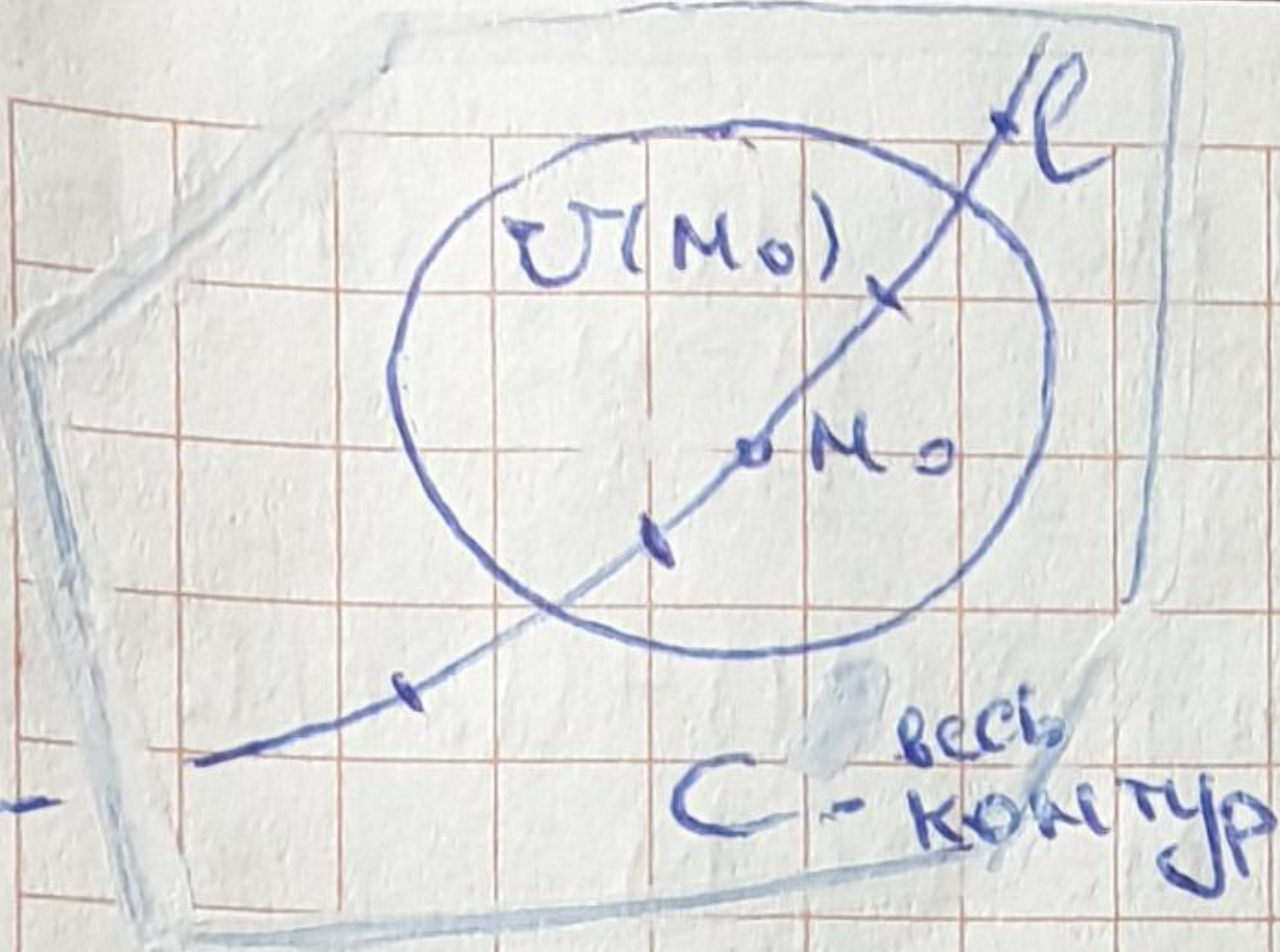
$$g(M) = \int F(M, P) d\Omega_p$$

Опр. $c \int F(M, P) d\Omega_p$ — равномерно экв. в $M_0 \in C$, если $c \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ окр } U(M_0) \text{ и } \gamma \text{ в } U(M_0) : M_0 \in \gamma \in U(M_0)$

$$\left| \int_{\gamma} F(M, P) d\Omega_p \right| < \varepsilon \quad \forall M \in U(M_0)$$

// C — контур, γ — дуга

конкр



Т. Если **1** равн. эк-се в $M_0 \in C$, то ф-я $g(M)$ непр в M_0

Без g -ва.

$$M_0 \in L; u(M) = \int f(p) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dl_p$$

$$u_0(M) = \int f(M_0) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dl_p$$

$\Delta \sigma(M) = u(M) - u_0(M)$ — разность потенциалов

Т. Если ф-я $f(M)$ непр в $M_0 \in L$, то ф-я $\sigma(M)$ непр в M_0

До-во:

$$\sigma(M) = \int_L (f(p) - f(M_0)) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dl_p$$

$f(M)$ непр в $M_0 \Rightarrow \exists U(M_0) : |f(M) - f(M_0)| < \epsilon/2\pi$

$$\left| \int_L [f(p) - f(M_0)] \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dl_p \right| = \left\{ \text{полярная эк} \right\}$$

$$= \left| \int_{\Delta \varphi} [f(\vec{r}(\varphi)) - f(\vec{r}(\varphi_0))] d\varphi \right| \leq$$

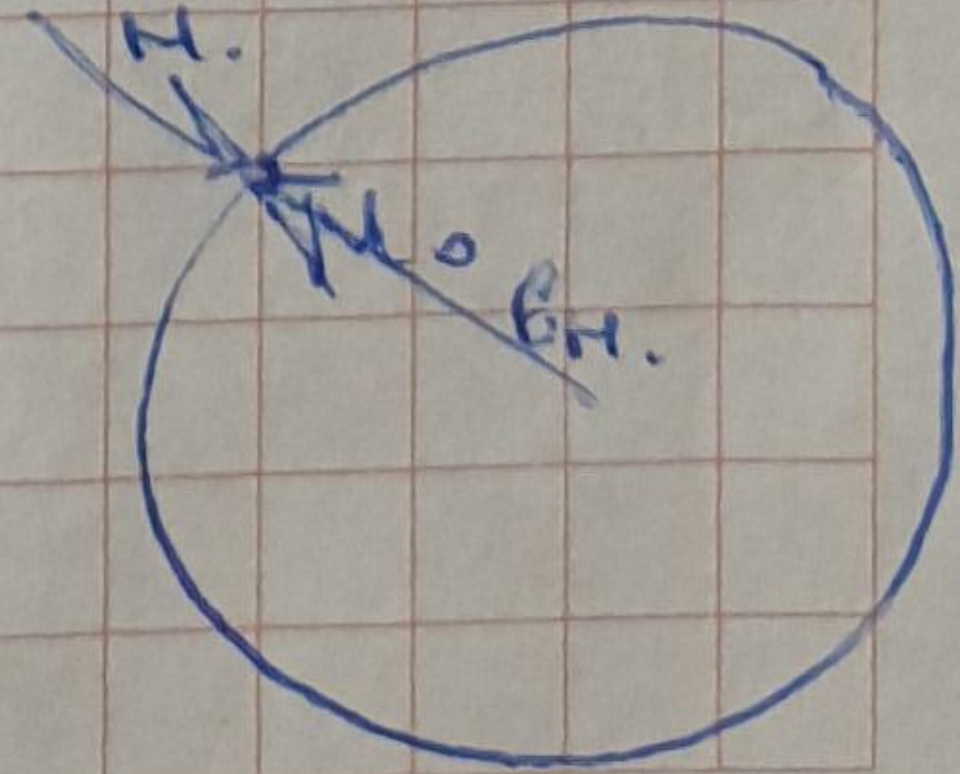
$$\leq \int_{\Delta \varphi} |f(\vec{r}(\varphi)) - f(\vec{r}(\varphi_0))| d\varphi \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \cdot 2\pi = \epsilon \Rightarrow \text{непр.}$$

Т (о скачке): $\exists f(M)$ непр на L .
Тогда $\forall M_0 \in L \exists$:

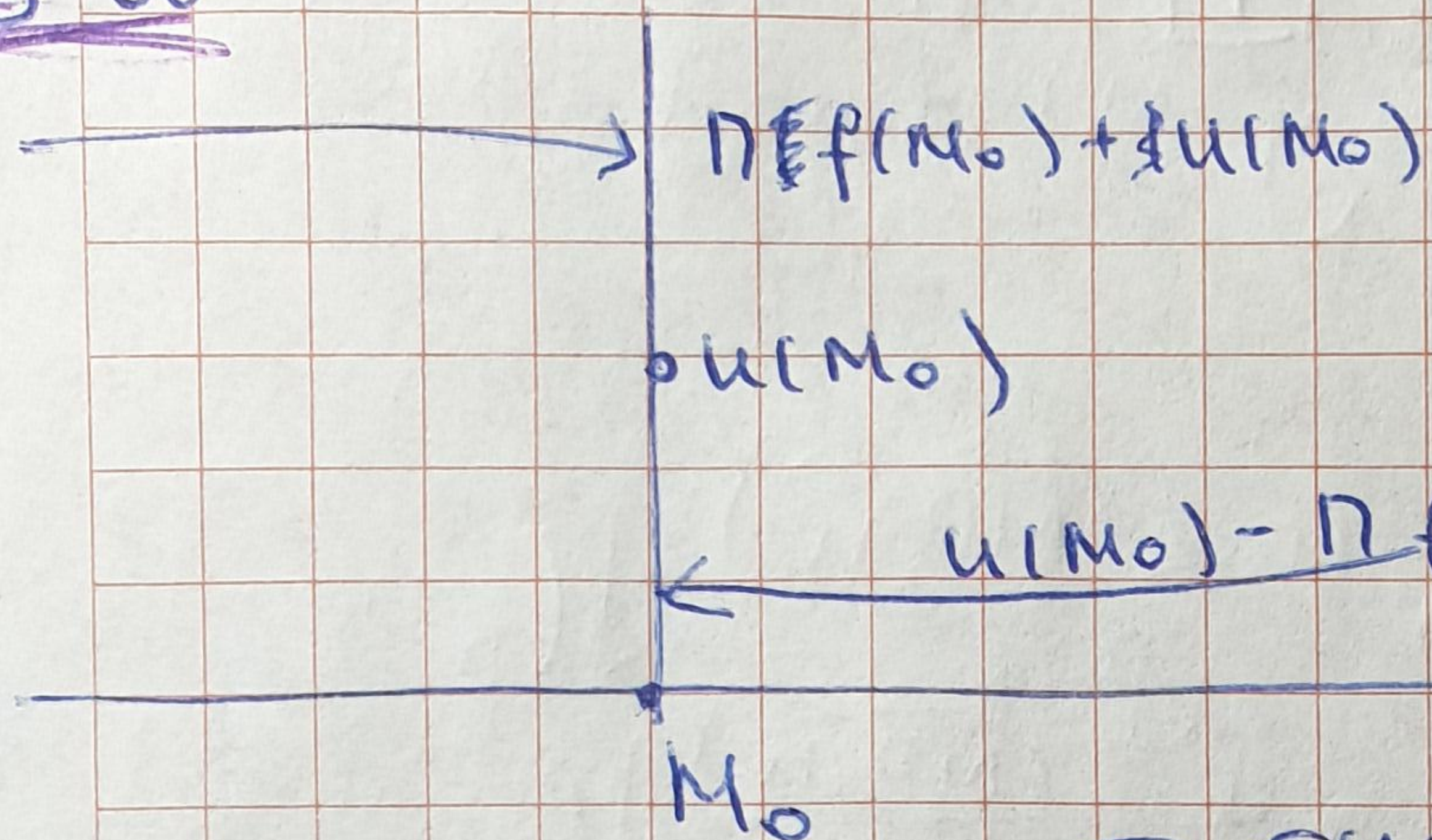
$$1. \lim_{M \rightarrow M_0} u_{\text{внут}}(M) = u_{\text{внут}}(M_0); \lim_{M \rightarrow M_0} u_{\text{нару}}(M) = u_{\text{нару}}(M_0)$$

$$2. u_{\text{вн}}(M_0) = u(M_0) + \pi f(M_0)$$

$$u_{\text{н}}(M_0) = u(M_0) - \pi f(M_0)$$



D-во:



1) $u_{\text{вн}}(M_0) = \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in D}} u(M) =$

вспомогательная функция, тогда так определим $\sigma = u - u_0$

$$= \lim_{M \rightarrow M_0, D \in M} [\sigma(M) + u_0(M)] =$$

$$= \{ u_0(M) = f(M_0) \cdot 2\pi \} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \sigma(M_0) + f(M_0) \cdot 2\pi = \{ \sigma(M_0) = u(M_0) - u_0(M_0) \} \\ & = u(M_0) - u_0(M_0) + f(M_0) 2\pi = \{ M_0 \in L \\ & \quad \forall u_0(M_0) = \pi f(M_0) \} \\ & = u(M_0) + \pi f(M_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) u_{\text{вн}}(M_0) &= \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \notin \bar{D}}} u(M) = \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \notin \bar{D}}} [\sigma(M) + u_0(M)] = \{ M_0 \notin \bar{D} \\ & \quad \downarrow \\ & \quad u_0(M_0) = 0 \} \\ & = \sigma(M_0) + 0 = -u_0(M_0) + u(M_0) = u(M_0) - \pi f(M_0) \end{aligned}$$

Просто напомним: $u_0(M) = \begin{cases} 2\pi f(M_0) & M \in D \\ \pi f(M_0) & M \in L \\ 0 & M \notin \bar{D} \end{cases}$

21. Средство внутренней задачи Дирихле к
 $\int_{\text{дана}}$ ур-ие Фредгольма 2-го

Δ внутр задачу Дирихле
 $u \in C(\bar{D}), u \in C^2(D)$
 $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D \\ u(x, y) = \mu(x, y) \quad (x, y) \in L \end{cases}$

Ищем $u(x, y) = \mu(x, y) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dl_p \quad M \in D$
 где $\mu(x, y)$ — решение задачи

$\mu(x, y) = \mu(M) + \int_L f(p) \frac{\cos \angle(\vec{MP}, \vec{n})}{r_{MP}} dl_p \quad M \in L$

$\int_{\text{дана}}$ ур-ие
 Фредгольма
 2-го

Т (альтернатива Фредгольма)

Если $\star$ при $\mu(M) = 0$ имеет только нулевое решение,
 то $\star$ однород ур-ие имеет непер (и!) решение.

22. Уравнение Внутренней задачи Дирихле

Т(Э) реш

Задача Внутренней Дирихле: $u \in C(\bar{D}); u \in C^2(D)$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{в } D \\ u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in h \end{cases}$$

Если $f(M)$ непрерывна на $h \Rightarrow$ Уравнение Внутр. задачи Дирихле D-во.

По альтернативе Фредгольма

достаточно р-ть реш

$$\oint_{h} f(M) + \int_{D} f(P) \frac{\cos \angle(MP, \vec{n})}{r_{MP}} dP = 0 \quad \text{Мех имеет только нулевое решение}$$

Это не так, т.е. Уравнение не имеет реш. $f(M) \neq 0$

Тогда (из непрерывности) $\exists M_0$:

$$f(M_0) = \max_{M \in h} |f(M)| > 0$$

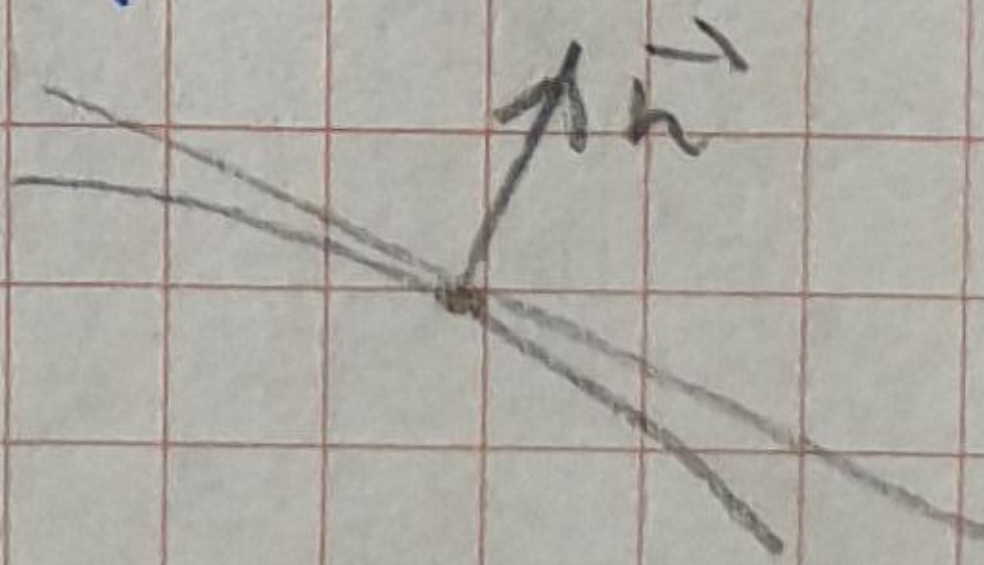
$$\oint_{h} f(M_0) + \int_{D} f(P) \frac{\cos \angle(M_0P, \vec{n})}{r_{MP}} dP = 0$$

$$\left\{ \oint_{h} f(M_0) = \int_{h} f(M_0) \frac{\cos \angle(M_0P, \vec{n})}{r_{MP}} dP; M_0 \in h \right\} \quad \text{из доказанного ранее}$$

$$\oint_{h} [f(P) + f(M_0)] \frac{\cos \angle(M_0P, \vec{n})}{r_{MP}} dP = 0$$

$$1. |f(M_0)| = \max_{M \in h} |f(M)| \geq |f(M)| \quad \forall M \in h$$

$$2. \frac{\cos \angle(M_0P, \vec{n})}{r_{MP}} = \frac{dy}{dr} > 0$$



$$\Rightarrow f(P) + f(M_0) = 0$$

$$\text{Взяв } P = M_0 \Rightarrow 2f(M_0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

23. Ур-ие колебаний. Постановка основной задачи.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad ; \quad a^2 - \text{материал, из которого сделана струна}$$

$$0 < x < l$$

$$t > 0$$

$u(x, t)$ - смещение x в момент времени t

$$u(x, t) \in C^2((x, t) : 0 < x < l, t > 0)$$

ур-ие колебаний идеальной струны

В случае 2-х переменных (x, y) :

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (x, y) \in D, \quad t > 0 - \text{ур-ие колебаний упругой мембраны}$$

Начальные условия:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x)$$

1. в нач. момент времени струну оттягивают, потом отпускают!

2. ψ - в нач. момент времени скорость

Крайовые (Граничные) условия:

$$I \text{ КУ: } u(0, t) = \mu(t) \quad ; \quad u(l, t) = \mu(t)$$

$$II \text{ КУ: } u_x(0, t) = \nu(t) \quad ; \quad u_x(l, t) = \nu(t)$$

III КУ:

$$u(0, t) + \lambda u_x(0, t) = \theta(t) \quad ; \quad u(l, t) + \lambda u_x(l, t) = \theta(t)$$

Чтобы написать КЗ, выбери из каждого столбца себе по одному КУ!

$$I \text{ КЗ: } \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < l \\ u(0, t) = \mu_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(l, t) = \mu_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$II \text{ КЗ: } \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x \leq l \\ u_x(0, t) = \nu_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = \nu_2(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Задача на полуинтервале:

$$I \text{ КЗ: } \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 \leq t \leq T, \quad x > 0 \\ u(0, t) = \mu(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x > 0 \end{cases}$$

$$II \text{ КЗ: } \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 \leq t \leq T, \quad x > 0 \\ u_x(0, t) = \nu(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x > 0 \end{cases}$$

$$3K: \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty; 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

- $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$; $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$
- $u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$
- $u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$
- $u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$

24. Φ -на Даламбера. $\exists$, $\odot$ и устойчивость
решения ЗК для ур-ий колебаний

$$\begin{cases} 1) u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \quad 0 < t \leq T \\ 2) u(x, 0) = \varphi(x) & -\infty < x < +\infty \\ 3) u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = x + at; & a > 0; a - \text{const} \\ \eta = x - at \end{cases} \quad x = \frac{\xi + \eta}{2}; \quad t = \frac{\xi - \eta}{2a}$$

пр +-ую $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$

$$\delta_\xi = u_x \left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a} \right) \cdot \frac{1}{2} + u_t \left(A \right) \cdot \frac{1}{2a}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\xi\eta} &= u_{xx}(A) \cdot \frac{1}{4} + u_{x\xi}(A) \left(-\frac{1}{4a} + \frac{1}{4a} \right) + u_{t\xi} \left(-\frac{1}{4a^2} \right) + 0 \\ &= \frac{1}{4a^2} (a^2 u_{xx} - u_{tt}) = 0 \Rightarrow \delta_{\xi\eta} = 0 \end{aligned}$$

$\delta_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow$ ~~общее решение~~ $u_\xi = \tilde{f}(\xi)$ // тогда $\delta_{\xi\eta} = 0$ теперь реш по ξ

$$u(\xi, \eta) = \int \tilde{f}(\xi) d\xi + \tilde{f}(\eta)$$

$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ решение имеет такой вид

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = a f_1'(x) - a f_2'(x) = \psi(x)$$

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int^x \psi(\xi) d\xi + \text{const}$$

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{c}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2}$$

Тогда
$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{c}{2} + \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2} = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

Ф-ла Даламбера.

Теорема 1:

$\varphi \in C^2(\mathbb{R}); \psi \in C^1(\mathbb{R})$

Тогда $\exists!$ $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ удовн 1-3

Д-во: $\exists$: проверим 1-й:

$$u_{tt} = \frac{a^2 \varphi''(x+at) + a^2 \varphi''(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} (\psi'(x+at) a^2 - \psi'(x-at) a^2)$$

$$= \frac{a^2 \varphi''(x+at) + a^2 \varphi''(x-at)}{2}$$

$$u_{xx} = \frac{\varphi''(x+at) + \varphi''(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} (\psi'(x+at) - \psi'(x-at))$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \checkmark$$

2-й: $u(x,0) = \varphi(x)$; 3-й: $u_t(x,0) = \psi(x)$

$\forall$ Ф-ла удовн 1-3 справедлива Ф-ла Даламбера, а она корректно задана только 1 Ф-ной

Теорема 2: $\varphi_i \in C^2(\mathbb{R}); \psi_i \in C^1(\mathbb{R}) \quad i=1,2$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \epsilon \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{Тогда:}$$

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \in [0,T]}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$$

Д-во: $\forall \epsilon \exists \delta \in \mathbb{R}$ $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ совб $i=1,2$

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \in [0,T]}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)}{2} + \frac{\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)}{2} + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ t \in [0,T]}} \left| \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)| d\xi \right| \leq \epsilon$$

$$\frac{1}{2a} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \int_{x-at}^{x+at} d\xi = T \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$$

25 Кметод разделения пересекшихся
двух дуг I и J из $\mathcal{A}$
дуг I и J касаются.

$$\left. \begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < l \quad 0 < t \leq T \\ &u(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \\ &u(l, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \\ &u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l \\ &u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned} \right\}$$

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

Ищем решение методом разделения переменных:
 $\psi(x, t) = X(x) T(t)$ // подставляем в 1

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \quad | : a^2 X(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

не змѣл, но не
успѣх на границѣ

$$\bullet \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$$

$$T_n(t) = \tilde{G}_n \sin \frac{n}{\ell} a t + \tilde{G}_n \cos \frac{n}{\ell} a t$$

ЗУМ:

$$\lambda_n = (\pi n / l)^2 ; n$$

$$X_n(x) = C_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

Поэтому $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) =$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{C_n}_{\tilde{C}_n \cdot \tilde{C}_n} \sin \frac{n\pi}{l} at + \underbrace{d_n}_{\tilde{C}_n \cdot \tilde{C}_n} \cos \frac{n\pi}{l} at \right] \sin \frac{n\pi}{l} x$

$$\bullet u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi}{L} a \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x = \psi(x)$$

$$d_m = \frac{2}{e} \int_0^e \psi(s) \sin \frac{\pi m}{e} s \, ds; \quad c_m \frac{\pi m}{e} a = \int_0^e \sin \frac{\pi m}{e} s \psi(s) \, ds \cdot \frac{2}{e}$$

Решение:
 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi a} \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} s \varphi(s) ds \right) \sin \frac{n\pi}{l} at + \left(\frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} s \varphi(s) ds \right) \cos \frac{n\pi}{l} at \sin \frac{n\pi}{l} x$
 по III к3. 6

$\square \varphi \in C^3[0, l]; \varphi \in C^2[0, l]$
 $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$
 $\psi(0) = \psi(l) = 0$

Тогда $u(x,t)$ определена формулой 6 и 7.
 $u \in C^2([0, l] \times [0, T])$ и удовлетворяет 1-5

D-во:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds = \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds = \left[-\frac{l}{n\pi} \varphi(s) \cos \frac{n\pi}{l} s \right]_0^l + \\ &+ \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{n\pi}{l} s ds = \frac{2}{n\pi} \varphi'(s) \cdot \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} s \Big|_0^l - \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi''(s) \cdot \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} s ds \\ &= -\frac{2l^2}{(n\pi)^2} \int_0^l \varphi''(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds = \frac{2l}{(n\pi)^2} \varphi''(s) \cdot \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} s \Big|_0^l - \\ &- \frac{2l^2}{(n\pi)^3} \int_0^l \varphi'''(s) \cos \frac{n\pi}{l} s ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds = \frac{2}{n\pi a} \varphi(s) \left(-\frac{l}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi}{l} s \Big|_0^l + \frac{2l}{(n\pi)^2 a} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{n\pi}{l} s ds \\ &= \frac{2l}{(n\pi)^2 a} \varphi'(s) \cdot \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} s \Big|_0^l - \frac{2l^2}{(n\pi)^3 a} \int_0^l \varphi''(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \end{aligned}$$

D-уменьшение ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n| n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n^2$

$$d_n = -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} \int_0^l \varphi'''(s) \cos \frac{n\pi}{l} s ds = -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} \widehat{\varphi}_n'''$$

$$c_n = -\frac{2l^2}{(n\pi)^3 a} \int_0^l \varphi''(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds = -\frac{2l^2}{(n\pi)^3 a} \widehat{\varphi}_n''$$

$$|d_n| \cdot n^2 = \frac{2l^2}{(n\pi)^3} |\widehat{\varphi}_n'''| \leq \frac{AB \leq A^2 + B^2}{\frac{1}{n} \cdot |\widehat{\varphi}_n'|} = \frac{2l^2}{n^3} \left(\frac{1}{n^2} + |\widehat{\varphi}_n'|^2 \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n| n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n'|^2 \text{ ex-cl } \text{ в силу аб-б } \text{ рядов Фурье} = \frac{l^2}{n^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + |\widehat{\varphi}_n'|^2 \text{ ex-cl}$$

Аналогично:

$$|c_n| \cdot n^2 = \frac{2l^2}{n^3 a} |\widehat{\varphi}_n''| \leq \frac{AB \leq A^2 + B^2}{\frac{1}{n} \cdot |\widehat{\varphi}_n'|} \leq \frac{l^2}{n^3 a} \left(\frac{1}{n^2} + |\widehat{\varphi}_n'|^2 \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \cdot n^2 = \left\{ \text{т.к. } \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\psi}_n|^2 \text{ эквив. p. type } \right\} = \frac{l^2}{\pi^3 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + |\hat{\psi}_n|^2 - \text{ex-cl}$$

$$v_n(x, t) = \left[C_n \sin \frac{\pi n}{l} x + D_n \cos \frac{\pi n}{l} x \right] \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$|v_n(x, t)| \leq \left\{ \begin{array}{l} |\sin \frac{\pi n}{l} x| \leq 1 \\ |\cos \frac{\pi n}{l} x| \leq 1 \\ |\sin \frac{\pi n}{l} x| \leq 1 \end{array} \right\} \leq |C_n| + |D_n|$$

По признаку Вейерштрасса pag 6 ex-cl $\Rightarrow$
 $\Rightarrow u(x, t) \in C\{[0, l] \times [0, T]\}$

Для г-ва $\exists$ непрерывных по x и t нужно
 г-во равн. ex-cl пере скомб производных

$$1. u_{xx}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \sin \frac{\pi n}{l} x + D_n \cos \frac{\pi n}{l} x \right] \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$2. u_{tt}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l a} \right)^2 \left[C_n \sin \frac{\pi n}{l} x + D_n \cos \frac{\pi n}{l} x \right] \sin \frac{\pi n}{l} x$$

и какая уроча! Мо уже г-ны, что $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |C_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |D_n|$ ex-cl

$$1. |v_{xx}(x, t)| \leq (|C_n| + |D_n|) \cdot \frac{\pi^2}{l^2} n^2 - \text{ex-cl} \Rightarrow u_{xx}(x, t) \text{ ex-cl}$$

$$2. |v_{tt}(x, t)| \leq (|C_n| + |D_n|) \left(\frac{\pi}{l a} \right)^2 n^2 - \text{ex-cl} \Rightarrow u_{tt}(x, t) \text{ ex-cl}$$

Тогда $u(x, t) \in C^2\{[0, l] \times [0, T]\}$
 4-5?

$$4. u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x)$$

$$5. u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l a} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Задача 3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $x > 0, t > 0$

$$1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; x > 0, t > 0$$

$$2) u(0, t) = 0$$

$$3) u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$4) u_t(x, 0) = \psi(x)$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$\Delta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} ; -\infty < x < \infty ; t > 0$$

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x-at) + \Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(s) ds$$

$$u(x, t) = U(x, t) \quad x \geq 0, t \geq 0$$

$$u(0, t) = \frac{\Phi(-at) + \Phi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(s) ds = 0 \quad \checkmark$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds ; & x \geq at \\ \frac{\varphi(x-at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(s) ds ; & x < at \end{cases}$$

$$II \text{ КЗ: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x > 0, t > 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x)$$

$$\varphi(0) = \psi(0)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$\Delta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} ; -\infty < x < \infty ; t > 0$$

$$u(x, t) = U(x, t) \quad x \geq 0, t > 0$$

$$u_x(0, t) = U_x(0, t) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] = 0$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi & x \geq at \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \int_{x-at}^0 \psi(\xi) d\xi \right] & x < at \end{cases}$$

26

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ 0 \leq x \leq l \end{array}$$

D-bo: $\Delta \psi(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} & 0 < x < l \quad 0 < t \leq T \\ v(0, t) = 0 \\ v(l, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ v(x, 0) = 0 \\ v_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\Delta I(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [(\psi_t(x,t))^2 + a^2 (\psi_x(x,t))^2] dx$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_0^l \sigma_t \sigma_{tt} + \underbrace{a^2 \sigma_x \sigma_{xt}}_{\text{no remainder } \sigma_x d\sigma_t} dx = \int_0^l \sigma_t \sigma_{tt} dx + \sigma_x \sigma_t \Big|_{x=0}^{x=l}$$

$$-a^2 \int_0^L \psi_t \psi_{xx} dx = \int_0^L \underbrace{\psi_t \psi_{tt} - a^2 \psi_t \psi_{xx}}_{\psi_t (\psi_{tt} - a^2 \psi_{xx})} dx + a^2 \underbrace{\psi_x(x,t) \psi_t(x,t)}_{=0} \Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I = \text{const}$$

4 нач. условия:

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [(\delta_t(x,0))^2 + a^2(\delta_x(x,0))^2] dx = 0$$

нач. уел.
 $\delta(x,0)=0$

$$\delta(x,0)=0 \Rightarrow \delta_x(x,0)=0$$

$$\left. \begin{array}{l} I(0)=0 \\ I(t)=\text{const} \end{array} \right\} \Rightarrow I(t)=0 \Rightarrow \delta_t(x,t)=\delta_x(x,t)=0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < l \\ 0 < t \leq T \end{array}$$

$$\Rightarrow \delta(x,t)=\text{const}, \quad \text{но } \delta(0,t)=\delta(l,t)=0, \text{ но } \delta(x,t)=0$$

Справедливо и для $\Pi \& K 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{tt} = a^2 \delta_{xx} \\ \delta_x(0,t) = 0 \\ \delta_x(l,t) = 0 \\ \delta(x,0) = 0 \\ \delta_t(x,0) = 0 \end{array} \right.$$

27 Задача с данными на характеристиках
~ система $\partial_t^2 u$ ур-н

$$a_{11}(x,y)u_{xx}(x,y) + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy}(x,y) + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \quad 1$$

Опр Характеристиками ур-на 1-е $\partial_t^2 u = a_{11}(x,y)(dy)^2 - 2a_{12}(x,y)dx dy + a_{22}(x,y)(dx)^2$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

$$a^2 (dt)^2 - (dx)^2 = 0$$

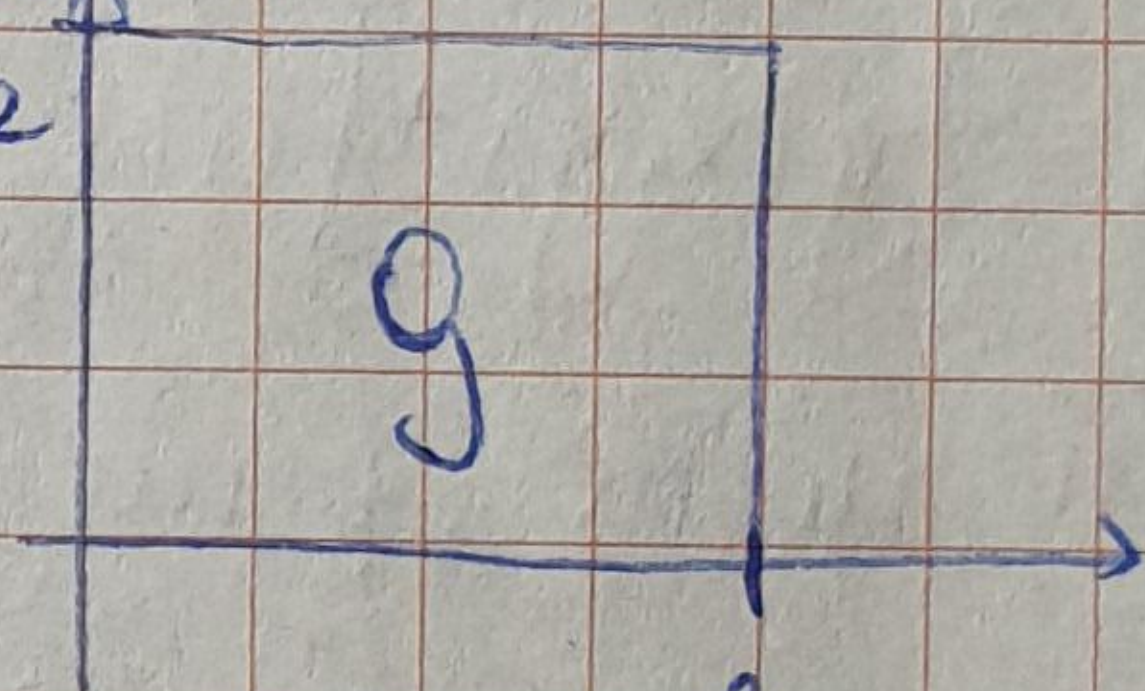
$$a dt - dx = 0 = d(at - x)$$

$$a dt + dx = 0 = d(at + x)$$

$\begin{cases} x + at = \text{const} \\ x - at = \text{const} \end{cases}$ — характеристики
при ур-не колебания

Задача с данными на хар-ках (Задача Гурса)

$$G = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$$



Задача для $u(x,y)$:

линейн. ур-не гиперболического типа

$$2 \quad \begin{cases} u_{xy} = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + f(x,y,u(x,y)) \end{cases} \quad (x,y) \in G$$

$$3 \quad \begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l_1 \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} u(0,y) = \psi(y) \quad 0 \leq y \leq l_2 \end{cases}$$

Хар-ки: $\begin{cases} dx/dx = 0 \Rightarrow x = \text{const} \\ dy/dy = 0 \Rightarrow y = \text{const} \end{cases}$

Таким образом реш $u(x,y)$ задается данными на характеристиках $x=0, y=0$

Условия I: $a, b \in C[\bar{Q}]$ // не $\bar{Q}$ т.к. G замкнуто

$f(x,y,p) \in C[\bar{Q} \times \mathbb{R}]$, функция $(x,y) \in \bar{Q} \forall p \in \mathbb{R}$

$$|f(x,y,p_1) - f(x,y,p_2)| \leq L|p_1 - p_2| \quad \forall (x,y) \in \bar{Q} \text{ и } \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}$$

усл. Липшица по 3-ему аргументу

$$\varphi \in C^1[0, l_1]; \psi \in C^1[0, l_2]; \varphi(0) = \psi(0)$$

Опр. Φ -а $u(x,y)$ — реш 2-4, если

$$1. u, u_x, u_y, u_{xy} \in C[\bar{G}]$$

$$2. u(x,y) \text{ ур-на 2-4}$$

Эквивалентное

система

$\int_{\Omega} \text{ур-и}$

ур-и

и $u(x, t)$ реш 2-4

2. $\int_{\Omega} u \leftrightarrow \eta$. Получим

$$u_x(x, y) - u_x(x, 0) = \int_0^y a(x, \eta) u_x + b(x, \eta) u_y + f(x, \eta, u(x, \eta)) d\eta$$

Теперь по x : $\int_0^x x \leftrightarrow \eta$

$$u(x, y) - \underbrace{u(0, y)}_{\psi(y)} - \underbrace{u(x, 0)}_{\psi(x)} + u(0, 0) = \int_0^x \int_0^y a(\xi, \eta) u_x(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u_y(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\eta d\xi$$

Введем Φ -ию $\Phi(x, y) = \psi(x) + \psi(y) - \psi(0)$

тогда

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(\xi, \eta) u_x(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u_y(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\eta d\xi$$

$$u_x(x, y) = \Phi_x(x, y) + \int_0^y a(x, \eta) u_x(x, \eta) + b(x, \eta) u_y(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta)) d\eta$$

$$u_y(x, y) = \Phi_y(x, y) + \int_0^x a(\xi, y) u_x(\xi, y) + b(\xi, y) u_y(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y)) d\xi$$

Введем новые Φ -ии: $\sigma = u_x$, $\omega = u_y$

$$5. u(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(\xi, \eta) \sigma(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \omega(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\eta d\xi$$

$$6. \sigma(x, y) = \Phi_x(x, y) + \int_0^y a(x, \eta) \sigma(x, \eta) + b(x, \eta) \omega(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta)) d\eta$$

$$7. \omega(x, y) = \Phi_y(x, y) + \int_0^x a(\xi, y) \sigma(\xi, y) + b(\xi, y) \omega(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y)) d\xi$$

То есть, что получили систему $\int_{\Omega} \text{ур-и}$: $u, \sigma, \omega \in C[\Omega]$

и экв. реш. 5-7. Тогда $u(x, y)$ реш 2-4 (так как $u_x = \sigma$, $u_y = \omega$ и если пройтись по $x, y \Rightarrow u(x, y)$ реш. 2-4

Если $u(x, y)$ реш 2-4, то σ, ω реш 5-7]

28. $\exists$ реш. задачи с данными на характеристиках

$$D = \{ (x, y), 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2 \}$$

Δ задачу для $u(x, y)$:

$$\begin{cases} 1. & u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + f(x, y, u(x, y)) \\ 2. & u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l_1 \\ 3. & u(0, y) = \psi(y) \quad 0 \leq y \leq l_2 \end{cases}$$

$\forall x, y = 0 \Rightarrow x = \text{const}, y = \text{const}$ - семейство прямых
Т.о. реш. $u(x, y)$ задается данными на хар-ках $x=0, y=0$

Условия I: $\{a, b\} \in C[D]$
 $f(x, y, p) \in C[D \times R]$

Усл. Липшица: $|f(x, y, p_1) - f(x, y, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$
 $\varphi \in C^1[0, l_1]; \psi \in C^1[0, l_2]$
 $\varphi(0) = \psi(0)$

Опр. Φ -я $u(x, y)$ реш. 1-3, если $u, u_x, u_y, u_{xy} \in C[D]$
и $u(x, y)$ удов. 1-3

Т. 1: $\exists$ полная система условий I, тогда $\exists u(x, y)$ усл. реш. 1-3
Д-во: Из 2-го следует, что нужно р-ть не $\exists$
 $u, \delta, \omega \in C[D]$ усл. решениям экв. сист. Φ -уравн:

$$\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$$

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(\xi, \eta) u(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

$$\delta(x, y) = \Phi_x(x, y) + \int_0^x a(x, \eta) \delta(x, \eta) + b(x, \eta) \omega(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta)) d\eta$$

$$\omega(x, y) = \Phi_y(x, y) + \int_0^y a(\xi, y) \delta(\xi, y) + b(\xi, y) \omega(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y)) d\xi$$

Δ посыл-е Φ -уравн $u_0(x, y) = 0, \delta_0(x, y) = 0, \omega_0(x, y) = 0$

$$u_n(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(\xi, \eta) \delta_{n-1}(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \omega_{n-1}(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u_{n-1}(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

$$\delta_n(x, y) = \Phi_x(x, y) + \int_0^x a(x, \eta) \delta_{n-1}(\xi, \eta) + b(x, \eta) \omega_{n-1}(\xi, \eta) + f(x, \eta, u_{n-1}(\xi, \eta)) d\eta$$

$$\omega_n(x, y) = \Phi_y(x, y) + \int_0^y a(\xi, y) \delta_{n-1}(\xi, y) + b(\xi, y) \omega_{n-1}(\xi, y) + f(\xi, y, u_{n-1}(\xi, y)) d\xi$$

$u_n, \omega_n, \delta_n \in C[D]$, т.к. сист. "все хорошо"
Хотим р-ть, что эти посыл-е сист.

$$u_1(x,y) = \varphi(x,y) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, 0) d\eta d\xi$$

$$B = \max \{ |u_1(x,y)| + |\varphi_1(x,y)| + |\omega_1(x,y)| \}$$

$$\forall (x,y) \in G : \begin{aligned} |u_1(x,y) - u_0(x,y)| &\leq B \\ |\varphi_1(x,y) - \varphi_0(x,y)| &\leq B \\ |\omega_1(x,y) - \omega_0(x,y)| &\leq B \end{aligned}$$

$$M = \max \{ \max_G |a(x,y)|, \max |b(x,y)|, L \}$$

$$|u_2(x,y) - u_1(x,y)| \leq \left| \int_0^x \int_0^y a(\xi, \eta) [u_1(x,y) - u_0(x,y)] + b(\xi, \eta) [\omega_1(x,y) - \omega_0(x,y)] + f(\xi, \eta, u_1(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, u_0(\xi, \eta)) d\eta d\xi \right| \leq$$

$$\leq M \int_0^x \int_0^y (|\varphi_1 - \varphi_0| + |\omega_1 - \omega_0| + |u_1 - u_0|) d\eta d\xi \leq MBxy$$

$$| \varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y) | \leq \left| \int_0^y a(x, \eta) [\varphi_1(x,y) - \varphi_0(x,y)] + b(x, \eta) [\omega_1(x,y) - \omega_0(x,y)] + f(x, \eta, u_1(x, \eta)) - f(x, \eta, u_0(x, \eta)) d\eta \right| \leq$$

$$\leq M \int_0^y (|\varphi_1 - \varphi_0| + |\omega_1 - \omega_0| + |u_1 - u_0|) d\eta \leq MB y$$

$$\bullet \text{ Аналогично } |\omega_2(x,y) - \omega_1(x,y)| \leq MBx$$

$$|u_2(x,y) - u_1(x,y)| \leq \left\{ xy \leq \frac{(x+y)^2}{2} \right\} \leq MB \frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$|\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y)| \leq MB \frac{x+y}{1!}, \text{ т.к. } x, y > 0$$

$$|\omega_2(x,y) - \omega_1(x,y)| \leq MB \frac{x+y}{1!}$$

$$\bullet k = 2 + l_1 + l_2$$

Основное предположение:

$$|u_n(x,y) - u_{n-1}(x,y)| \leq BM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{n!}$$

$$|\varphi_n(x,y) - \varphi_{n-1}(x,y)| \leq BM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|\omega_n(x,y) - \omega_{n-1}(x,y)| \leq \dots$$

• Верно при $n=2$

• Д-ем для $n+1$:

$$\begin{aligned}
 |u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y)| &\leq M \int_0^x \int_0^y |\sigma_n(g,\eta) - \sigma_{n-1}(g,\eta)| + \\
 &+ |\omega_n(g,\eta) - \omega_{n-1}(g,\eta)| + |u_n(g,\eta) - u_{n-1}(g,\eta)| d\eta dy \leq \\
 &\leq \{ \text{по предг. индукции} \} \leq M \int_0^x \int_0^y 2BM^{n-1} k^{n-2} \frac{(g+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} + BM^{n-1} k^{n-2} \frac{(g+\eta)^n}{n!} d\eta dy \\
 &\leq M \cdot BM^{n-1} k^{n-2} \left[2 \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} \right] = \\
 &= BM^n k^{n-2} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left[2 + \frac{(x+y)}{n+2} \right] \leq \left\{ 2 + \frac{(x+y)}{n+2} \leq 2 + \frac{l_1+l_2}{n+2} \leq \right. \\
 &\left. \leq 2+l_1+l_2 = k \right\} \\
 &\leq BM^n k^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

Д-ем для $\sigma_n \omega$:

$$\begin{aligned}
 |\sigma_{n+1}(x,y) - \sigma_n(x,y)| &\leq M \int_0^y |\sigma_n(g,\eta) - \sigma_{n-1}(g,\eta)| + \\
 &+ |\omega_n(g,\eta) - \omega_{n-1}(g,\eta)| + |u_n(g,\eta) - u_{n-1}(g,\eta)| d\eta \leq \text{по индукц.} \\
 &\leq M \int_0^y 2BM^{n-1} k^{n-2} \frac{(g+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} + BM^{n-1} k^{n-2} \frac{(g+\eta)^n}{n!} d\eta = \\
 &= M \cdot B k^{n-2} \left[2 \frac{(x+y)^n}{n!} + \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \right] \leq BM k^{n-2} \cdot \frac{(x+y)^n}{n!} k
 \end{aligned}$$

Для ω аналогично:

$$u_n(x,y) = \sum_{m=1}^n u_m(x,y) - u_{m-1}(x,y)$$

$$\sigma_n(x,y) = \sum_{m=1}^n \sigma_m(x,y) - \sigma_{m-1}(x,y)$$

$$\omega_n(x,y) = \sum_{m=1}^n \omega_m(x,y) - \omega_{m-1}(x,y)$$

$$|u_m(x,y) - u_{m-1}(x,y)| \leq BM k^{m-2} \frac{(l_1+l_2)^m}{m!} \leq B \frac{A^m}{m!}$$

$$\Rightarrow u_n(x,y) \Rightarrow \overline{u}(x,y) \in [Q]$$

Аналогично: $\sigma_n(x,y) \Rightarrow \overline{\sigma}(x,y) \in [Q]$
 $\omega_n(x,y) \Rightarrow \overline{\omega}(x,y) \in [Q]$

Сх-сть u_n, σ_n, ω_n
 $\sim$ сх-сти ряда, т.е
 если ряд сх-ст
 равн-мо в Q , то
 и поел-сть сх-ст
 равн-мо в Q
 $\frac{A^m}{m!}$
 сх-ст

Переходим к итерации и получаем, что $u, \bar{v}, \bar{w}$ реш. система

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \phi(x, y) + \int_0^x \int_0^y a(\xi, \eta) \bar{v}(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \bar{w}(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta \\ \bar{v}(x, y) &= \phi_x(x, y) + \int_0^x a(x, \eta) \bar{v}(x, \eta) + b(x, \eta) \bar{w}(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta)) d\eta \\ \bar{w}(x, y) &= \phi_y(x, y) + \int_0^x a(\xi, y) \bar{v}(\xi, y) + b(\xi, y) \bar{w}(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y)) d\xi. \end{aligned}$$

29. 1) решение задачи с данными на хар-тах

$$Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq l_1; 0 \leq y \leq l_2\}$$

Задачу для $u(x, y)$:

$$\begin{aligned} 1) & \quad u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + f(x, y, u(x, y)) \quad (x, y) \in Q \\ 2) & \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l_1 \\ 3) & \quad u(0, y) = \psi(y) \quad 0 \leq y \leq l_2 \end{aligned}$$

$\Delta x \Delta y = 0 \Rightarrow$ существование $x = \text{const}$
применяя $y = \text{const}$

Условие I: $a, b \in C[Q]$; $f(x, y, p) \in C[Q \times \mathbb{R}]$

Условие Липшица: $|f(x, y, p_1) - f(x, y, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$

$\varphi \in C^1[0, l_1]$; $\psi \in C^1[0, l_2]$; $\varphi(0) = \psi(0)$

$u, u_x, u_y, u_{xy} \in C[Q]$

Спр. ∇ -я $u(x, y)$ реш 1-3, если $\Delta u(x, y)$ удов 1-3

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^y \int_0^{l_1} [a(\xi, \eta) \delta(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) w(\xi, \eta) + f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))] d\xi d\eta$$

$$\delta(x, y) = \Phi_x(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta) \delta(x, \eta) + b(x, \eta) w(x, \eta) + f(x, \eta, u(x, \eta))] d\eta$$

$$w(x, y) = \Phi_y(x, y) + \int_0^y [a(\xi, y) \delta(\xi, y) + b(\xi, y) w(\xi, y) + f(\xi, y, u(\xi, y))] d\xi$$

$$\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$$

Т! Если выполнены условия I, то для всех

$u_1(x, y), u_2(x, y)$ реш задачи 1-3, то

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in Q$$

Р-во: $u_1(x, y), u_2(x, y)$ реш 1-3 $\Rightarrow \{u_1(x, y), \delta_1(x, y), w_1(x, y)\}, \{u_2(x, y), \delta_2(x, y), w_2(x, y)\}$ реш 4-6

$$\text{где } \delta_i^0(x, y) = \frac{\partial u_i(x, y)}{\partial x}, w_i(x, y) = \frac{\partial u_i(x, y)}{\partial y} \quad i = 1, 2$$

$$\text{Введем: } U(x, y) = |u_1(x, y) - u_2(x, y)|$$

$$V(x, y) = |\delta_1(x, y) - \delta_2(x, y)|$$

$$W(x, y) = |w_1(x, y) - w_2(x, y)|$$

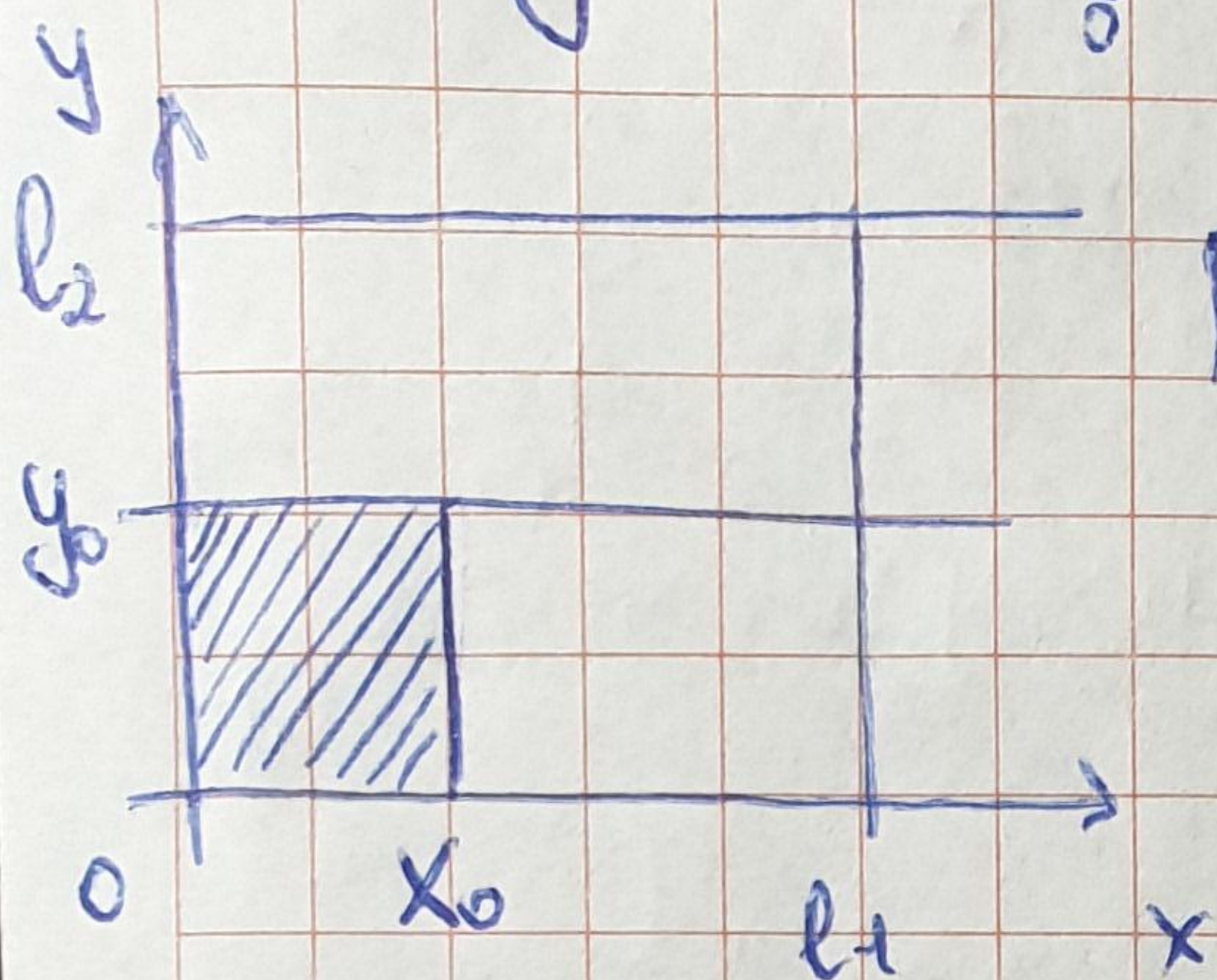
$$U(x, y) \leq M \int_0^x \int_0^y V(\xi, \eta) + W(\xi, \eta) + U(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$V(x, y) \leq M \int_0^x U(\xi, \eta) + W(\xi, \eta) + V(\xi, \eta) d\xi$$

информат

$$W(x, y) \leq M \int_0^x U(z, y) + W(z, y) + V(z, y) dz$$

Можно показать, что $U = V = W = 0$ в G



Возьмем такие x_0, y_0 : $\begin{cases} 3x_0 y_0 M < 1 \\ 3y_0 M < 1 \\ 3x_0 M < 1 \end{cases}$

$$G_{x_0 y_0} = \{(x, y) \mid x \in [0, x_0], y \in [0, y_0]\}$$

$$\bar{U} = \max_{G_{x_0 y_0}} U(x, y); \quad \bar{V} = \max_{G_{x_0 y_0}} V(x, y); \quad \bar{W} = \max_{G_{x_0 y_0}} W(x, y)$$

Предположим, что $\bar{U} \geq \bar{V}; \quad \bar{U} \geq \bar{W}$

$$U(x, y) \leq M \int_0^x \int_0^y [\bar{U} + \bar{U} + \bar{U}] dz dy \leq M \cdot 3 \bar{U} x_0 y_0 < \bar{U} \Rightarrow \bar{U} = 0$$

• Теперь $\bar{W} \geq \bar{U}; \quad \bar{W} \geq \bar{V}$

$$W(x, y) \leq M \int_0^x 3 \bar{W} dz \leq 3 x_0 M \bar{W} < \bar{W} \Rightarrow \bar{W} = 0$$

аналогично, если $\bar{V} \geq \bar{U}$ и $\bar{V} \geq \bar{W} \Rightarrow \bar{V} = 0$

Итак: $\bar{U} = \bar{W} = \bar{V} = 0$ в $G_{x_0 y_0}$

Теперь берем такое x_1 : $\begin{cases} 3(x_1 - x_0) y_0 M < 1 \\ 3(x_1 - x_0) M < 1 \\ 3y_0 M < 1 \end{cases}$ и $x_1 < x_0$

Правим таким образом по полоске $(x) \Rightarrow$ продвигаясь по y и теперь на этом ур-е проходим по полоске $\Rightarrow$ за конечное число шагов пройдем весь G

30. Сопряженные дифференциальные операторы. Пример

$$\Delta \quad u(x_1, \dots, x_n) \in C^2(\Omega); \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n; \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

Диф-оп оператор 2-ого порядка:

$$L[u] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\bar{x})u$$

$$a_{ij} \in C^2(\Omega); \quad b_i \in C^1(\Omega); \quad c \in C(\Omega) \quad [a_{ij}(\bar{x}) = a_{ji}(\bar{x})]$$

Сопряженный оператор: $\sigma \in C^2(\Omega); \quad \sigma(x_1, \dots, x_n) \equiv \sigma(\bar{x})$

$$M[\sigma] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) u(\bar{x})) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(\bar{x}) \sigma(\bar{x})) + c(\bar{x}) \sigma(\bar{x})$$

Опр $L[u]$ называется самосопряженным, если $L[u] = M[u]$
 $\forall u \in C^2(\Omega)$

Д-еи, что $\sigma L[u] - u M[\sigma] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_i}$, где

$$p_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \left[\sigma a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\bar{x}) - u \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) \sigma(\bar{x})) \right] + b_i(\bar{x}) u(\bar{x}) \sigma(\bar{x})$$

Д-во:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\sigma a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j}(\bar{x}) \frac{\partial \sigma a_{ij}(\bar{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) \sigma(\bar{x})) \right] +$$

$$\sigma(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) \sigma(\bar{x})) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_i} b_i(\bar{x}) \sigma(\bar{x}) + u(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(\bar{x}) \sigma(\bar{x})) \right] + c u \sigma - c u \sigma = \sigma L[u] - u M[\sigma]$$

$c = c(\bar{x}), \quad u = u(\bar{x}), \quad \sigma = \sigma(\bar{x})$

$$m=0 \text{ т.к. } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(\bar{x}) \frac{\partial (\sigma a_{ij}(\bar{x}))}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) \sigma(\bar{x}))$$

Пример 1: $\Delta u(x_1, x_2, x_3)$:

Оператор Лапласа: $L[u] = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$

$b_i = c_i = 0$; $a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \Rightarrow M[u] = L[u]$ - т.е.
оператор Лапласа самосопряженный.

Пример 2: $L[u] = \Delta u + bux_1$; $b \neq 0$ $\Rightarrow L[u] \neq M[u]$
 $M[u] = \Delta u - bux_1$

т.е. этот оператор не самосопряженный

Пример 3: Ур-ие распространения тепла в пр-ве
 $u_t = \text{div}(K \text{grad } u) + f$; $K(\bar{x}) = K(x_1, x_2, x_3)$
 $u(x_1, x_2, x_3) \in u(\bar{x})$

$$L[u] = \text{div}(K \text{grad } u) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} K \right]$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K(x) & i = j \end{cases}; b_i = \frac{\partial K}{\partial x_i}$$

$$M[u] = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (u K(\bar{x})) - \frac{\partial K}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (u K(\bar{x})) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial K}{\partial x_i} u \right) \stackrel{?}{=} \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} K$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} K(\bar{x}) + u \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial^2 K}{\partial x_i^2} u - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} K(\bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 K}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_i^2} u -$$

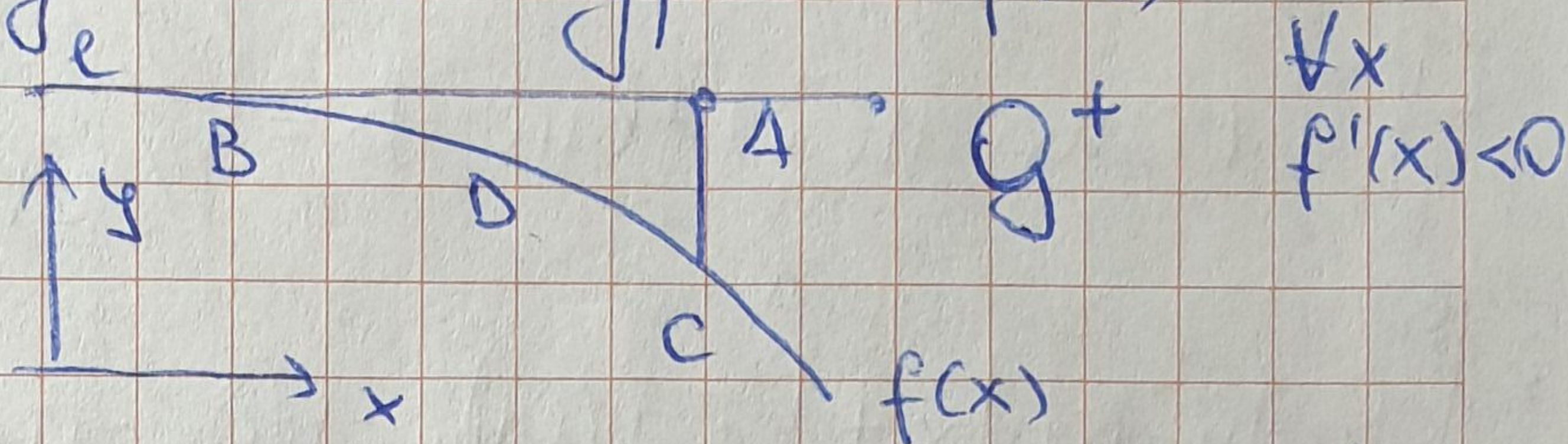
$$- \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} K(\bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_i}$$

$$\square \Rightarrow L[u] = M[u]$$

оператор самосопряженный

3.1. Метод Рунге

Есть кривая Γ , заданная ур-нием $f(x)$



Такую задачу:

$$1) u_x + a(x, y)u + b(x, y)u_y + c(x, y)u = F(x, y) \text{ в } Q^+$$

$$2) u|_{\Gamma} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \psi(x)$$

$$a, b \in C^2[Q^+]; c \in C[Q^+]; F \in C[Q^+]$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in C(R)$$

Хотим получить $\pm$ -ну для решения этой задачи.

$$u \in C^2[Q^+] \text{ и является решением 1-2}$$

соединим $\bullet A$ с кривой Γ отрезками „||“ осей координат.

Получим $\bullet B(x_0, y_0)$ и $\bullet C(x_0, y_0)$.

D - контур от B к C .

$$L[u] = u_x + a(x, y)u + b(x, y)u_y + c(x, y)u - \text{оператор}$$

$$L[u] = F$$

$$a_{11} = a_{22} = 0; a_{12} = a_{21} = 1/2; b_1 = a; b_2 = b; c = c$$

$$M[u] = u_x - au - bu_y + cu - \text{сопряженный к } L[u]$$

Применим $\pm$ -ну из 30 Леммы:

$$\oint_D (\delta L[u] - u M[\delta]) ds = \iint_D \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) ds = \text{применим } \pm\text{-ну Грина}$$

$$= \int_{\partial D} (p_1 dy - p_2 dx) = \int_B^C (p_1 dy - p_2 dx) + \int_C^A p_1 dy + \int_A^B p_2 dx =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \delta \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2} \delta \right) + a u \delta \\ p_2 &= \frac{1}{2} \delta \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} \delta \right) + b u \delta \end{aligned} \right\} =$$

$$x_1 = x; y = x_2$$

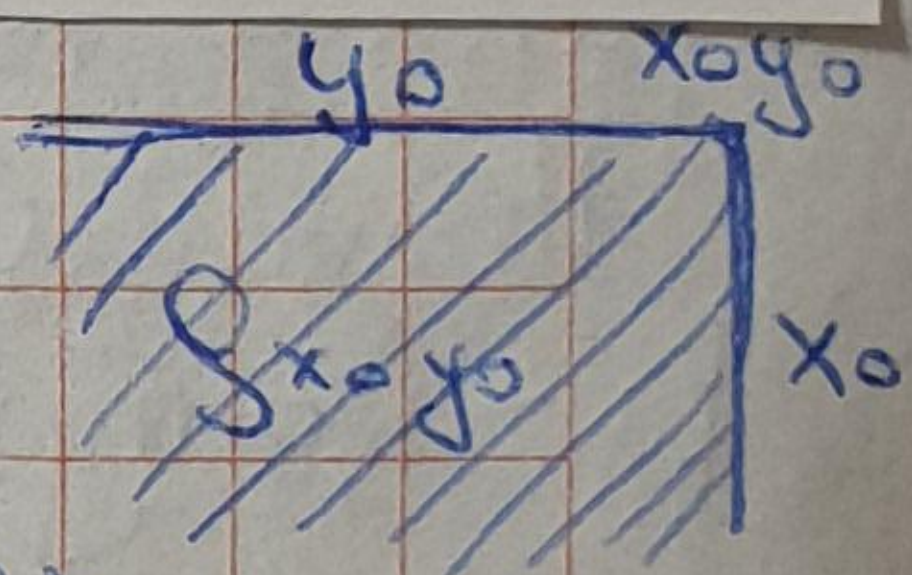
$$\begin{aligned}
&= \int_B^C p_1 dy - p_2 dx + \int_C^A \left[\frac{1}{2} (\delta u_y - u \delta y) + a u \delta \right] dy + \\
&+ \int_B^A \left[\frac{1}{2} (\delta u_x - u \delta x) + b u \delta \right] dx = \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} (\delta u_y - u \delta y) &= \frac{1}{2} (\delta u)_y - u \delta y \\ \frac{1}{2} (\delta u_x - u \delta x) &= \frac{1}{2} (\delta u)_x - u \delta x \end{aligned} \right\} \\
&= \int_B^C p_1 dy - p_2 dx + \int_C^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_y - u (\delta y - a \delta) \right] dy + \\
&+ \int_B^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_x - u (\delta x - b \delta) \right] dx \\
&\bullet \iint_D (\delta L[u] - u M[\delta]) ds = \int_B^C p_1 dy - p_2 dx + \int_C^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_y - \right. \\
&\quad \left. - u (\delta y - a \delta) \right] dy + \int_B^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_x - u (\delta x - b \delta) \right] dx
\end{aligned}$$

δ дана произвольная $\neq$ нулю. Водерее ее можно, тогда $M[\delta] = 0$, т.е.

$$M[\delta] = \delta_{xy} - (a\delta)_x - (b\delta)_y + c\delta = 0$$

$$\begin{cases} \delta(x_0, y) = \exp\left(\int_{y_0}^y a(x_0, s) ds\right) & y \leq y_0 \\ \delta(x, y_0) = \exp\left(\int_{x_0}^x b(s, y_0) ds\right) & x \leq x_0 \end{cases}$$

это граничные условия на характеристиках



$$\begin{aligned}
&\bullet \delta_y - a\delta = 0 \text{ при } x = x_0 \\
&\delta_x - b\delta = 0 \text{ при } y = y_0 \\
&\delta(x_0, y_0) = 1
\end{aligned}$$

характеристики т.е. $\delta(x_0, y)$ реш. $\delta(x, y_0)$ реш.

Итого

$$\begin{aligned}
\iint_D (\delta L) ds &= \int_B^C p_1 dy - p_2 dx + \int_C^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_y \right] dy + \int_B^A \left[\frac{1}{2} (\delta u)_x \right] dx \\
&= \int_B^C p_1 dy - p_2 dx + \frac{1}{2} \delta(A) u(A) - \frac{1}{2} \delta(C) u(C) + \frac{1}{2} \delta(A) u(A) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \delta(B) u(B) = \left\{ \begin{aligned} \delta(A) &= 1 \\ \text{или } \text{картинка} \end{aligned} \right\} = \int_B^C p_1 dy - p_2 dx + \\
&+ u(A) - \frac{1}{2} \delta(C) u(C) - \frac{1}{2} \delta(B) u(B)
\end{aligned}$$

$A = x_0, y_0$

$$u(A) = u(x_0, y_0) = \iint_D \sigma F dS - \int_B p_1 dy - p_2 dx + \frac{1}{2} (\sigma(C)u(C) + \sigma(B)u(B))$$

Выведем формулу из предположения, что решение $\exists$
 Такое построенное решение для такой общей задачи
 Если знаем u , то знаем и u_x, u_y :

теорема Римана

$\vec{\tau} = \{1, f'(x)\} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$ — единичный вектор $\vec{\tau}$ касательной к ℓ

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = \frac{(u(x, f(x)))_x}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\vec{n}, \text{grad} u); \vec{n} = \left\{ \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \right\}$$

единичный вектор нормали к ℓ $\perp \vec{\tau}$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \right)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, f(x)) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} f'(x) \\ \varphi(x, f(x)) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \end{cases}$$

если $|\text{grad} u| \neq 0 \Rightarrow u_x \text{ и } u_y \neq 0$